ПРЯМОЛИНЕЙНАЯ
ТРИГОНОМЕТРІЯ.

СОСТАВИЛЪ

Н. РЫБКИНЪ.

ВЫПУСКЪ ПЕРВЫЙ,

содержащій курсъ гимназій.

ИЗДАНІЕ ТРЕТЬЕ.

МОСКВА.
Изданіе книгоиздательства «**Школа**».
(Спиридоновка, д. № 14.)
1914.

Предисловіе къ первому изданію.

Предлагаемый учебникъ назначается для гимназій и реальныхъ училищъ и будетъ состоять изъ двухъ выпусковъ: основного, соотвѣтствующаго программѣ гимназій, и небольшого дополнительнаго къ нему, содержащаго тѣ статьи тригонометріи, которыми программа реальныхъ училищъ отличается отъ гимназической*).

Обращаясь къ настоящему, первому выпуску, я долженъ прежде всего оговорить его *объемъ*. Растянутость изданія объясняется: 1) затратой мѣста на достиженіе возможной наглядности въ текстѣ, 2) большимъ числомъ чертежей и 3) большимъ числомъ примѣровъ и сполна рѣшенныхъ задачъ**). Около листа заняли «Прибавленія» — отдѣлъ, въ которомъ я помѣстилъ варіанты нѣкоторыхъ доказательствъ***) и нѣсколько замѣтокъ для учениковъ, интересующихся болѣе глубокимъ разборомъ вопроса: въ учебникѣ, назначенномъ для *старшаго* возраста, такой отдѣлъ мнѣ казался вполнѣ умѣстнымъ. [Параграфы, къ которымъ имѣются прибавленія, отмѣчены звѣздочкой, напримѣръ: **6***, **26*** и т. д.]

Затѣмъ, я желалъ бы обратить вниманіе на особую роль подстрочнаго мелкаго шрифта. Его назначеніе — служить *учебнымъ* комментаріемъ къ главному тексту: въ формѣ подстрочныхъ примѣчаній я помѣстилъ тѣ поясненія и тѣ вообще подробности, которыя полезны, или даже необходимы, ученику въ то время, когда онъ разбираетъ предметъ въ первый разъ, но которыя были бы неумѣстны въ главномъ текстѣ, потому что при повторительномъ чтеніи могли бы напрасно задерживать вниманіе. Для примѣра назову стр. 11, 13, 24, 26, 27, 28, 39, 48, 52, 53, 60, 69, 74, 93 и т. д.

Перехожу теперь къ краткому обзору отдѣльныхъ частей учебника: гоніометріи, статьи о рѣшеніи треугольниковъ и статьи объ измѣреніяхъ на мѣстности.

---

*) Графическое рѣшеніе тр-ковъ. Примѣненіе таблицъ натуральныхъ тригонометрическихъ величинъ. Рѣшеніе простѣйшихъ тригонометрическихъ уравненіи.

**) Въ отдѣлѣ о рѣшеніи тр-ковъ помѣщено 30 задачъ.

***) См. прибавл. къ §§ 26 и 25, 33 и 34, 47 и 48 и 64—66.

Гоніометрія 1) Всѣ теоремы *общаго* характера доказаны въ *общемъ* же видѣ. Это казалось мнѣ и согласнымъ съ требованіями программъ *), и желательнымъ въ интересахъ логической полноты и стройности изложенія; а трудности обобщенія я старался устранить наглядностью доказательства и простотою его плана. [Позволю себѣ представить на судъ читателя §§ 10, 33 и 34 (и прибавл. къ нимъ), 37, 44—48 (и прибавл. къ §§ 47 и 48) и 64.]

Если бы прохожденіе гоніометріи въ общемъ видѣ оказалось не соотвѣтствующимъ количеству времени или составу класса, то можно образовать сокращенный курсъ, выпустивъ нѣкоторые параграфы учебника, а §§ 64—66 замѣнивъ варіантомъ, помѣщеннымъ въ прибавленіяхъ.

2) Что касается основного въ гоніометріи понятія тригонометрической функціи, то здѣсь я заботился объ единствѣ и ясности принятой точки зрѣнія и объ ея строгой выдержанности **). Въ *учебной* книгѣ я считаю важной, особенно для начинающихъ, даже выдержанность въ обозначеніяхъ.

Имѣя въ виду *обычныя* ошибки начинающихъ, я вездѣ настойчиво провожу *различіе между тригонометрической* функціей и тригонометрической линіей, а также ставлю не видное мѣсто вопросъ о знакахъ.

3) Когда приходится сравнивать два тригонометрическихъ выраженія по абсолютной величинѣ и знаку ***), то я *производу* эти сравненія не совмѣстно, а раздѣльно, стараясь тѣмъ выразить равноцѣнность

---

*) Такъ въ гимназической программѣ значится между прочимъ: «Измѣненіе тригонометрическихъ величинъ съ измѣненіемъ дугъ *отъ 0 до* ∞ *и отъ 0* до $-\infty$».

Въ объяснительной запискѣ къ программѣ реальныхъ училищъ читаемъ: «При рѣшеніи тригонометрическихъ уравненіи необходимо заставлять учениковъ выписывать всѣ рѣшенія этихъ уравненій въ видѣ *общихъ формулъ*». Рѣшеніе же тригонометрическихъ уравненій въ общемъ видѣ предполагаетъ пользованіе общностью теоремъ, а слѣдовательно — въ своемъ мѣстѣ — и доказательство этой общности.

Указаніе объяснительной записки, что слѣдуетъ касаться теоріи тригонометрическихъ функцій лишь настолько, насколько она необходима для рѣшенія треугольниковъ, я отношу къ *выбору* теоремъ.

Даже въ рѣшеніи треугольниковъ, *если его вести строго*, приходится иногда выступать изъ обычныхъ границъ аргумента (см. числовой примѣръ въ § 145 и замѣчаніе къ § 134).

**) Позволю себѣ выдѣлить тѣ мѣста учебника, въ которыхъ содержится постепенное ознакомленіе учащагося съ тригонометрическими функціями; эти мѣста слѣдующія: 3-й отрывокъ § 1, послѣдній отрывокъ § 5 и затѣмъ §§ 11—22.

***) Напр. при составленіи формулъ приведенія.

обоихъ элементовъ количества *) (§ 36 примѣръ 2, 2-й способъ; §§ 37, 39, 45—48). Я счелъ также нелишнимъ разобрать и нѣкоторые сбивчивые *случаи въ изслѣдованіи* знаковъ (см. напр. прибавл къ § 73).

4) Далѣе, я желалъ бы обратить вниманіе читателя на приведенный въ § 26 *«общій принципъ»* и на изложеніе *періодичности* тригонометрическихъ функцій (§§ 29 и 30): *обычное* опредѣленіе періодичности (помѣщенное у меня въ формѣ теоремы въ концѣ § 30), будучи вполнѣ строгимъ, неудобно тѣмъ, что не вызываетъ отчетливаго *представленія.*

5) Къ таблицамъ я приступаю немедленно послѣ того, какъ ученику станетъ понятнымъ ихъ ограниченіе острыми углами (гл. IV). Но при этомъ я не останавливаюсь на устройствѣ таблицъ и на обращеніи съ ними, находя излишнимъ повторять въ учебникѣ то, что имѣется уже при самыхъ таблицахъ **). [О *составленіи* таблицъ см. въ гл. VII.]

6) Нахожденіе угловъ между 0 и 360° и опредѣленіе угла въ общемъ видѣ помѣщено главнымъ образомъ для тригонометрическихъ уравненій. Получаемыя формулы, затруднительныя для ученика по *своей отвлеченности (напр. формулы § 59), я старался пояснить* наглядными иллюстраціями.

7) Что касается *рѣшенія тригонометрическихъ уравненій*, то подробное изложеніе его теоріи и пріемовъ будетъ дано во второмъ выпускѣ учебника. Въ настоящемъ же *выпускѣ тригонометрическія* уравненія встрѣчаются въ §§ 99, 102, 103, 104, 106, 107, 144 и 145.

Рѣшеніе треугольниковъ. 1) Такъ какъ характеръ этого отдѣла преимущественно *прикладной*, то я счелъ умѣстнымъ привести въ двухъ особыхъ замѣткахъ нѣсколько общихъ указаній о рѣшеніи задачъ (§§ 88—90 и 108).

2) Излагая пріемы рѣшенія треугольниковъ, я держался сказаннаго въ § 90. Иногда я упоминалъ также о степени точности вычисленія и о способахъ повѣрки (§§ 96, 126, 129, 130, прибавл. къ § 126 и прибавл. къ § 129)

3) Что касается такъ называемыхъ особыхъ случаевъ рѣшенія треугольниковъ, то — по соображеніямъ методическимъ — я помѣстилъ ихъ довольно много, выбравъ, конечно, болѣе важные или типическіе ***). Нѣ-

---

*) Ученики большею частію склонны считать знакъ тригонометрической функціи менѣе важнымъ, чѣмъ абсолютная величина, и это вредитъ отчетливости усвоенія.

**) Чтобы статья объ устройствѣ и употребленіи таблицъ достигала цѣли, она, во-первыхъ, должна относиться къ тѣмъ именно таблицамъ, какія у ученика на рукахъ, а во-вторыхъ, должна быть изложена не въ тонѣ учебника, а въ тонѣ самоучителя. По моему мнѣнію, обращеніе съ таблицами есть дѣло непосредственнаго обученія въ классѣ.

***) *Большую часть ихъ я взялъ изъ задачъ, предлагавшихся* на окончательныхъ испытаніяхъ

которыя изъ этихъ задачъ рѣшены въ учебникѣ двумя способами (§§ 113, 134, 135, 136, 137 и 139), а двѣ задачи тремя способами (§§ 99 и 138).

4) Я обращалъ вниманіе также на изслѣдованіе задачи, на сопоставленіе результатовъ, полученныхъ различными путями, и т. п. (см. замѣчанія — въ текстѣ и подстрочныя — къ §§ 99, 106, 107, 111, 113, 131, 134, 139, 141 и 143). Въ этомъ я видѣлъ средство оживить изложеніе.

Измѣренія на мѣстности. Здѣсь я ограничился только самымъ главнымъ. При этомъ я старался, чтобы статья имѣла характеръ по возможности *геодезическій*, такъ что, излагая то или другое примѣненіе тригонометріи, я разсматривалъ и его геодезическую сторону.

При составленіи предлагаемаго руководства мнѣ служили пособіемъ кромѣ русской учебной литературы еще слѣдующія сочиненія: «Алгебраическій анализъ» Коши и курсы тригонометріи Бріо и Буке, Ребьера, Серре и Schlomilch'а. Для статьи объ измѣреніяхъ на мѣстности я пользовался преимущественно «Курсомъ низшей геодезіи» А. Бика.

Читатель безъ труда выдѣлитъ самъ, что̀ въ учебникѣ заимствовано изъ названныхъ источниковъ и что̀ принадлежитъ составителю; я позволю себѣ только заявить, что §§ 10, 29, 44—48, 52—59 и 64 относятся къ числу обработанныхъ самостоятельно.

Мартъ 1894 г.

Второе и третье изданія отличаются отъ перваго лишь незначительными исправленіями.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ВВЕДЕНІЕ.

ВВЕДЕНІЕ.

1. Предметъ и раздѣленіе тригонометріи. Основную задачу тригонометріи составляетъ рѣшеніе треугольниковъ съ помощью *вычисленія*[1]. *Рѣшить* треугольникъ значитъ найти *числовую* величину его элементовъ по достаточной совокупности данныхъ также *числовыхъ*.

Вообще же къ тригонометріи относится бо́льшая часть вопросовъ, гдѣ въ число данныхъ или искомыхъ входитъ уголъ, равно и другіе случаи, въ которыхъ примѣняются свойства тригонометрическихъ функцій.

Тригонометрическія функціи угловъ суть особаго рода числа, вводимыя въ вычисленіе взамѣнъ угловъ; эти числа, хотя и не выражаютъ угловъ съ помощью мѣры, тѣмъ не менѣе такъ связаны съ ними, что служатъ какъ бы ихъ замѣстителями.

2. Разсмотрѣніе свойствъ тригонометрическихъ функцій должно предшествовать рѣшенію треугольниковъ.

Такимъ образомъ въ тригонометріи различаютъ два главныхъ отдѣла:

1) ученіе о тригонометрическихъ функціяхъ, называемое *гоніометріей*, и

2) ученіе о рѣшеніи треугольниковъ, составляющее *тригонометрію* въ тѣсномъ смыслѣ.

Замѣчаніе. Тригонометрія, содержащая рѣшеніе обыкновенныхъ треугольниковъ, называется *прямолинейной* (или *плоской*) въ отличіе отъ *сферической* тригонометріи, въ которой разсматриваются такъ называемые сферическіе треугольники.

---

[1] Ниже будетъ сказано еще о *графическомъ* рѣшеніи треугольниковъ.

3. Замѣчаніе о графическомъ рѣшеніи треугольниковъ. Кромѣ тригонометрическаго рѣшенія треугольниковъ существуетъ еще *графическое*, т.-е. такое, въ которомъ примѣняется *построеніе*. Оно состоитъ въ слѣдующемъ: элементы, данные въ числахъ, сначала воспроизводятъ по масштабу и транспортиру; затѣмъ, пользуясь полученными линіями и углами, строятъ искомые элементы (при чемъ образуется фигура, которая подобна рѣшаемой); наконецъ, измѣряя ихъ съ помощью тѣхъ же приборовъ, получаютъ требуемыя числа.

При такомъ пріемѣ неизбѣжны погрѣшности, — иногда значительныя, — а такъ какъ онѣ зависятъ отъ качества чертежныхъ принадлежностей и отъ искусства черченія, то и не допускаютъ оцѣнки. Это обстоятельство дѣлаетъ графическій способъ мало надежнымъ, между тѣмъ какъ тригонометрія, примѣняя вычисленіе, даетъ средство опредѣлять искомыя величины съ желаемой степенью точности.

4. О функціяхъ вообще. Существуютъ перемѣнныя величины, связанныя между собою такъ, что каждому значенію одной изъ нихъ *соотвѣтствуетъ* значеніе (или даже нѣсколько значеній) другой. Таковы, напримѣръ, y и x въ равенствахъ: $y=a+x$, $y=\sqrt[3]{x}$, $y=\lg x$; таковы же радіусъ круга и его площадь, ребро куба и его объемъ, и т. д.

Если требуется подобрать соотвѣтственныя значенія такихъ величинъ или прослѣдить ходъ измѣненія ихъ, то мы должны назначить рядъ значеній одной изъ нихъ и по нимъ опредѣлять значенія другой величины. Напримѣръ, составляя таблицу логариѳмовъ, принимаютъ въ уравненіи $y=\lg x$ за x послѣдовательно 1, 2, 3, ... и по этимъ числамъ находятъ рядъ значеній y.

Величина, которая въ данномъ вопросѣ получаетъ свои значенія въ зависимости отъ другой, называется функціей ея, а та, которая при этомъ принимаетъ свои значенія непосредственно, называется аргументомъ. Такъ, если, имѣя уравненіе $y=x^n$, будемъ мѣнять x и опредѣлять y, то x есть аргументъ, а y функція; если же станемъ назначать y и подбирать x, то y есть аргументъ, а x функція. Вообще, что̀ служитъ функціей и что̀ аргументомъ, зависитъ отъ свойствъ вопроса.

5. Функція и аргументъ могутъ быть или *однородны*, какъ напр. произведеніе и множимое, или *разнородны*, какъ напр. дуга и центральный уголъ.

Что касается самой *зависимости* между функціей и аргументомъ, то иногда она выражается такъ просто, что функцію легко

вычислить по аргументу въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ, какъ напр. площадь квадрата по его сторонѣ; въ другихъ функціяхъ, наоборотъ, рядъ дѣйствій при точномъ или приближенномъ вычисленіи ихъ настолько сложенъ, что для практическихъ приложеній разъ навсегда заготовляютъ ряды значеній аргумента и функціи и помѣщаютъ ихъ въ особыхъ *таблицахъ;* таковы напр. таблицы логариѳмовъ, таблицы квадратныхъ и кубическихъ корней и т. п.

Иногда пользуются таблицами и при неособенно сложныхъ дѣйствіяхъ — ради удобства и сбереженія времени[1]). Но для функцій такихъ какъ логариѳмы таблицы *необходимы:* практическое примѣненіе логариѳмы получили только тогда, когда были составлены достаточно точныя и удобныя таблицы.

Къ числу функцій этого рода относятся и тригонометрическія функціи; для нихъ также имѣются таблицы, *которыя и составляютъ одну изъ главныхъ принадлежностей тригонометріи:* безъ таблицъ тригонометрическія функціи не имѣли бы практическаго приложенія.

6*. Измѣреніе дугъ и угловъ. Какъ извѣстно изъ геометріи, углы весьма легко опредѣляются съ помощью дугъ.

Если дуга служитъ для опредѣленія угла, то ее выражаютъ или 1) въ отношеніи къ окружности или 2) въ отношеніи къ радіусу [2]).

Первый способъ — это извѣстное изъ геометріи *градусное измѣреніе* дуги, когда она выражается составнымъ числомъ въ доляхъ окружности: градусахъ, минутахъ и секундахъ.

Градусному измѣренію дуги соотвѣтствуетъ градусное измѣреніе угла. Выгода этого соотвѣтствія та, что уголъ [3]) и дуга выражаются однимъ и тѣмъ же числомъ.

Но не должно забывать, что градусное выраженіе дуги показываетъ лишь ея отношеніе къ окружности, между тѣмъ какъ градусное выраженіе угла опредѣляетъ его вполнѣ (позволяетъ воспроизвести уголъ).

---

[1]) Такова, напримѣръ, таблица умноженія, которую обыкновенно запоминаютъ.

[2]) Первый способъ нагляднѣе и примѣняется въ практическихъ измѣреніяхъ, второй предпочитаютъ въ теоретическихъ вопросахъ.

[3]) Центральный.

Второй способъ называется *линейнымъ измѣренiемъ* дуги: здѣсь она выражается въ отношенiи къ радiусу, при чемъ мы пользуемся не самой дугой, а ея *длиной (выпрямленной* дугой); такъ, по этому способу окружность выразится числомъ 2π, полуокружность числомъ π, и т. д.

Покажемъ, что, зная отношенiе дуги къ радiусу, можно опредѣлить уголъ, и обратно. Дѣйствительно, пусть напр. дуга выражается (въ радiусѣ) числомъ a; тогда длина ея есть aR. Означая искомый уголъ черезъ x и прямой уголъ черезъ d, будемъ имѣть

$$x:4d=aR:2\pi R \quad \text{или} \quad x:4d=a:2\pi,$$

откуда можно опредѣлить x по данному a, и обратно.

Можно сдѣлать, что уголъ и дуга будутъ выражаться однимъ и тѣмъ же числомъ [1]): для этого надо за мѣру для угловъ принять такой уголъ, котораго дуга имѣетъ *длину* радiуса (этотъ уголъ равенъ $\frac{2d}{\pi}$, слѣдовательно есть величина постоянная, почему и можетъ служить мѣрой). Такое измѣренiе угла будемъ называть также *линейнымъ*, а новую угловую мѣру *радiаномъ* (особаго обозначенiя эта мѣра не имѣетъ).

7. Въ послѣдующемъ, для ясности, будемъ градусное выраженiе дуги или угла обозначать черезъ α, β, γ, . . ., а линейное выраженiе черезъ a, b, c, . . .; обозначенiя же x, y, z, . . . будемъ брать въ обоихъ смыслахъ.

Для перехода съ градуснаго выраженiя на линейное или обратно служитъ пропорцiя

$$\alpha:360^\circ=a:2\pi,$$

$$\text{откуда}\ a=\pi\cdot\frac{\alpha}{180^\circ} \quad \text{и} \quad \alpha=180^\circ\cdot\frac{a}{\pi}\text{*)}$$

Примѣры. 1) *Какъ выразится въ градусной системѣ дуга, имѣющая длину радiуса (выражаемая въ радiусѣ числомъ единица)?* По предыдущему эта дуга равна $180^\circ\cdot\frac{1}{\pi}$; пользуясь приближен-

---

[1]) Но, конечно, въ неодинаковыхъ единицахъ.

*) $\pi=3,\ 14159\ 26535\ 89793\ 23846$ . . . .

$\frac{1}{\pi}=0,\ 31830\ 98861\ 83790\ 67153$ . . . .

нымъ значенiемъ $\frac{1}{\pi}$, найдемъ, что она содержитъ $57^\circ 17' 44'',8$ съ точностью до $0,05''$ (это же есть градусное выраженiе радiана).

2) *Найти линейное выраженiе дуги $67^\circ 30'$ (выразить въ радiанахъ уголъ $67^\circ 30'$).* Означая искомое число черезъ x, получимъ по предыдущему $x = \pi \cdot \frac{67^\circ 30'}{180^\circ} = \pi \cdot \frac{3}{8}$; приближенное вычисленiе даетъ $x = 1,17810$ съ точностью до $\frac{1}{2}$ стотысячной доли.

Замѣчанiе. Для облегченiя такихъ переходовъ существуютъ особыя таблицы: такова напр. «*Таблицы для выраженiя дугъ въ частяхъ радiуса и обратно*», приложенная къ логариѳмическимъ таблицамъ Е. Пржевальскаго.

О ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХЪ ФУНКЦІЯХЪ.

(Гоніометрія.)

I. Предварительныя понятія.

8. Обобщеніе понятій объ углѣ и дугѣ. Геометрическія понятія угла и дуги въ тригонометріи нѣсколько видоизмѣняются и расширяются[1]).

1) *Угломъ* въ тригонометріи называютъ *поворотъ* одной стороны относительно другой, т.-е. представляютъ себѣ, что одна сторона неподвижна, а другая, вращаясь, описала данное число угловыхъ единицъ; при этомъ получаются углы *и болѣе 360°* (такъ, можно сказать: проволока закручена на 400°; минутная стрѣлка въ теченіе 3 ч. 25 м. повертывается на 1230°; и т. д.

Кромѣ *величины* поворота различаютъ его *направленіе:* если вращеніе можетъ происходить по *двумъ противоположнымъ* направленіямъ, то при *одномъ* изъ нихъ уголъ выражаютъ *положительнымъ* числомъ, а при *другомъ* — *отрицательнымъ* (выборъ знака зависитъ отъ условій вопроса).

2) Подобное же распространяется и на дуги: дуга разсматривается какъ путь, который проходитъ точка, двигаясь по окружности (при этомъ точка можетъ обойти окружность не одинъ разъ и въ двухъ направленіяхъ); въ дугѣ также различаютъ направленіе (одно изъ двухъ противоположныхъ) и приписываютъ ей тотъ же знакъ, какой имѣетъ уголъ.

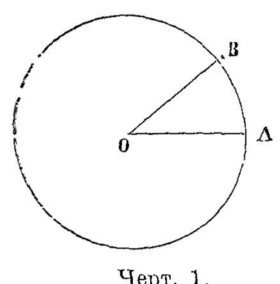
9. Итакъ въ тригонометріи уголъ и дуга суть перемѣнныя величины, способныя принимать всѣ значенія отъ $-\infty$ до $+\infty$.

---

[1]) Главнымъ образомъ ради приложеній въ высшей математикѣ.

Означая уголъ и дугу какой-либо буквой, будемъ подъ ней подразумѣвать число и знакъ; напримѣръ: $a=-1070°$; $b=-\frac{\pi}{6}$; $c=1,03$; и т. д.

10. Общій видъ дугъ и угловъ, имѣющихъ одни и тѣ же начало и конецъ. Возьмемъ какую-нибудь дугу, напр. 750°; пусть будутъ A и B ея начало и конецъ. Разсмотримъ другія дуги, начинающіяся въ той же точкѣ A.



Черт. 1.

Очевидно, что тѣ изъ нихъ, которыя отличаются отъ 750° на *полное* число *окружностей* [1]), оканчиваются также въ точкѣ B, а всѣ другія внѣ этой точки.

Такимъ образомъ, начиная всѣ дуги отъ точки A, получимъ слѣдующій рядъ дугъ (x), оканчивающихся въ точкѣ B.

x		−690°	−330°	30°	390°	750°	1110°	1470°	.....
n*)		−4	−3	−2	−1	0	1	2	.....

Этотъ рядъ есть *ариѳметическая прогрессія (безконечная въ обѣ стороны)*, въ которой одинъ изъ членовъ есть 750°, а разность равна 360°; всѣ члены этой прогрессіи можно получить по формулѣ $x=750°+360°.n$, придавая n всѣ *цѣлыя* значенія отъ $-\infty$ до $+\infty$ (см. нижнія числа въ таблицѣ).

Итакъ, если α есть одна изъ дугъ, имѣющихъ данные начало и конецъ, то *общій видъ* всѣхъ дугъ, имѣющихъ тѣ же начало и конецъ, есть $\alpha+360°.n$, гдѣ n означаетъ перемѣнное цѣлое число (положительное, отрицательное, нуль).

Если дуга выражена въ доляхъ радіуса, то формула приметъ видъ: $a+2\pi.n$ (такъ, вмѣсто $750°+360°.n$ получилось бы $\frac{25}{6}\pi+2\pi.n$).

Сказанное выше о дугахъ относится и къ угламъ.

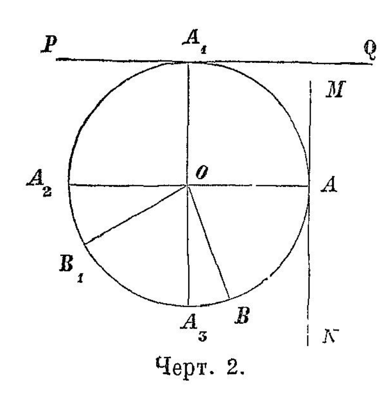
11. ***Вступительное замѣчаніе къ §§ 12—15.*** Тригонометрическія функціи, о которыхъ будетъ рѣчь ниже, связаны съ углами отчасти при помощи построенія. Это построеніе состоитъ: 1) въ *опредѣленномъ* нанесеніи на кругъ даннаго угла какъ централь-

[1]) На 360° повторенные одинъ или нѣсколько разъ.

*) Нижнія числа объяснятся далѣе.

наго и 2) въ проведеніи при этомъ кругѣ особыхъ линій, съ помощью которыхъ и получаются тригонометрическія функціи. Разсмотримъ указанныя построенія.

15. Тригонометрическій кругъ. Опишемъ кругъ *произвольнымъ* радіусомъ и проведемъ два перпендикулярныхъ діаметра; для краткости будемъ ихъ называть *горизонтальнымъ* (AA_2) и *вертикальнымъ* (A_1A_3)*), а оба безразлично *главными.*



Черт. 2.

Будемъ углы отсчитывать отъ одного и того же начала, а именно отъ праваго горизонтальнаго радіуса (OA); положительные углы будемъ откладывать вверхъ отъ него (противъ стрѣлки часовъ), а отрицательные внизъ [1]). Стороны угла будемъ различать названіями: *начальный радіусъ (общее начало угловъ)* и *подвижной радіусъ.*

Заданіемъ угла вполнѣ опредѣляется положеніе подвижного радіуса, но не обратно: для даннаго подвижного радіуса можно предположить сколько угодно угловъ (§ 10).

Четыре части, на которыя кругъ дѣлится главными діаметрами, будемъ называть *четвертями* (или *квадрантами);* онѣ считаются въ такомъ порядкѣ: AOA_1 первая четверть (первый квадрантъ), A_1OA_2 вторая четверть и т. д.

Примемъ еще слѣдующій способъ выраженія: если уголъ оканчивается, положимъ, въ III четверти, то будемъ его называть: «уголъ III четверти», и т. п.; но такое указаніе, конечно, ничего не говоритъ о величинѣ угла: такъ углы 120°, 500° и — 200° одинаково назовемъ углами II четверти. Если подвижной радіусъ приходится на одномъ изъ главныхъ діаметровъ, то уголъ можно отнести къ двумъ четвертямъ: напр. 540° можно разсматривать какъ уголъ II четверти или III четверти.

Соотвѣтственно угламъ отсчитываются и дуги.

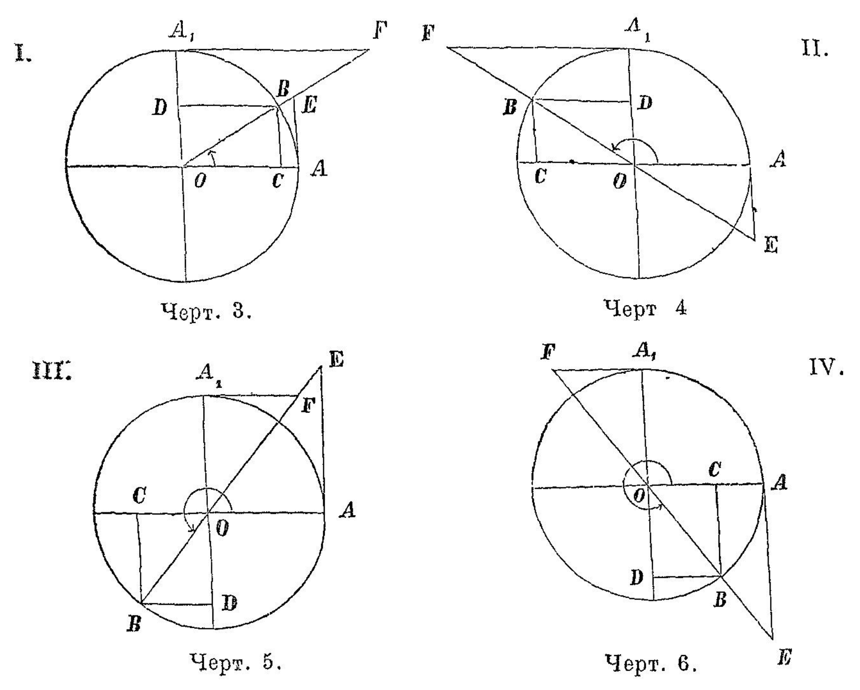
---

*) Они и могутъ быть такими, если плоскость чертежа вертикальна.

[1]) Такъ углы 650° и — 150°, начинаясь общимъ радіусомъ OA, оканчиваются радіусами OB и OB_1.

13. Кромѣ главныхъ діаметровъ въ тригонометрическомъ кругѣ проводятъ еще двѣ касательныя: чрезъ начало и конецъ первой четверти[1]); будемъ ихъ называть: *первая касательная* (MN) и *вторая касательная* (PQ).

14. Тригонометрическія линіи. Такъ называются тѣ линіи, посредствомъ которыхъ будутъ опредѣлены тригонометрическія функціи; эти линіи суть слѣдующія (на прилагаемыхъ чертежахъ онѣ показаны для каждой четверти отдѣльно; при каждомъ подвижномъ радіусѣ отмѣченъ наименьшій положительный уголъ).



Черт. 3. Черт 4

Черт. 5. Черт. 6.

1. Вертикальная проекція подвижного радіуса[2]) (OD) или перпендикуляръ (BC), опущенный изъ конца дуги на горизонтальный діаметръ.

2. Горизонтальная проекція подвижного радіуса (OC) или перпендикуляръ (BD), опущенный изъ конца дуги на вертикальный діаметръ.

---

[1]) Здѣсь имѣется въ виду четверть *окружности*.

[2]) Точнѣе: проекція подвижного радіуса на вертикальный діаметръ.

3. Отрѣзокъ первой *касательной отъ* точки касанія до продолженія подвижного радіуса (AE).

4. Отрѣзокъ *второй касательной отъ* точки касанія до продолженія подвижного радіуса (A_1F).

5. Отрѣзокъ отъ центра до точки пересѣченія первой касательной съ продолженнымъ подвижнымъ радіусомъ (OE). [Сокращенно будемъ *говорить: первый отрѣзокъ* сѣкущей].

6. Отрѣзокъ отъ центра до точки пересѣченія *второй* касательной съ продолженнымъ подвижнымъ радіусомъ (OF). [Сокращенно будемъ говорить: второй отрѣзокъ сѣкущей].

15. Для каждой тригонометрической линіи возможны два противоположныхъ направленія относительно своего начала.

Началомъ для проекцій подвижного радіуса и отрѣзковъ сѣкущей служитъ центръ круга, для касательныхъ — точки касанія[1]).

Проекціи подвижного радіуса и отрѣзки касательныхъ берутся на линіяхъ, имѣющихъ опредѣленное положеніе въ кругѣ, отрѣзки сѣкущей — на линіи, которая вращается вмѣстѣ съ содержащимся въ ней подвижнымъ радіусомъ (при этомъ отрѣзокъ сѣкущей бываетъ направленъ или въ сторону подвижного радіуса или обратно ему).

---

[1]) Относительно перпендикуляровъ BC и BD будетъ разъяснено въ § 16.

II. Тригонометрическія функціи. Ихъ измѣненія и взаимная зависимость.

16. Общее опредѣленіе тригонометрическихъ функцій. *Тригонометрическими функціями угла или дуги называются количества (отвлеченныя, положительныя и отрицательныя), выражающія направленіе и отношеніе къ радіусу тригонометрическихъ линій* [1]). Разъяснимъ отдѣльныя части этого опредѣленія.

1) Въ § 15 было замѣчено, что каждой тригонометрической линіи свойственны два противоположныхъ направленія. Выборъ направленія можно указать знакомъ при числѣ, выражающемъ длину, а именно: *условились* изъ двухъ линій, измѣряемыхъ въ обѣ стороны отъ общаго начала, одну выражать положительнымъ числомъ, а другую отрицательнымъ [2]). Отсюда происходятъ знаки тригонометрическихъ функцій [3]).

Въ тригонометрическихъ линіяхъ *положительными* считаютъ тѣ направленія, какія онѣ имѣютъ для *первой* четверти, т.-е. въ *вертикальныхъ* линіяхъ направленіе *вверхъ* отъ начала, въ *горизонтальныхъ* линіяхъ *вправо* отъ начала, а въ *отрѣзкахъ сѣкущей* направленіе *въ одну сторону съ подвижнымъ радіусомъ (отъ центра къ концу дуги)*.

Что касается перпендикуляровъ BC и BD, то они служатъ для замѣны проекцій OD и OC*), а потому ихъ выражаютъ тѣми же числами, какъ соотвѣтствующія проекціи.

---

[1]) Или иначе: *тригонометрическая функція угла или дуги есть отношеніе тригонометрической линіи къ радіусу, взятое со знакомъ, выражающимъ направленіе тригонометрической линіи.*

[2]) Это условіе *(принципъ Декарта)* уже было примѣнено ранѣе къ угламъ и дугамъ (§ 8)

[3]) Т.-е. знаки чиселъ, служащихъ значеніями тригонометрическихъ функцій.

*) Чтобы можно было обѣ проекціи соединить въ одномъ треугольникѣ.

2) Будемъ для каждой тригонометрической линіи находить отношеніе къ радіусу: въ результатѣ получимъ шесть отвлеченныхъ чиселъ. Такъ какъ всѣ тригонометрическія линіи сравниваются съ радіусомъ [1]), то онъ служитъ на тригонометрическомъ кругѣ какъ бы мѣрою длины, и потому полученныя отношенія можно разсматривать какъ выраженія длины и присоединять къ нимъ знаки — согласно сказанному въ п. 1.

3) Итакъ каждому углу будутъ соотвѣтствовать шесть особыхъ количествъ. Докажемъ, что эти количества *не зависятъ отъ длины радіуса.*

Дѣйствительно, измѣнимъ радіусъ, оставляя тотъ же уголъ: направленія тригонометрическихъ линій, очевидно, не измѣнятся, слѣдовательно знаки количествъ сохранятся; далѣе, новая фигура будетъ *подобна* первой, а такъ какъ въ подобныхъ фигурахъ взаимное отношеніе соотвѣтственныхъ линій одинаково, то отношенія тригонометрическихъ линій къ радіусу будутъ имѣть такую же величину, что и въ первый разъ. Такимъ образомъ, несмотря на измѣненіе радіуса, въ упомянутыхъ количествахъ сохранятся и знаки и абсолютныя величины, т.-е. эти количества не измѣнятся [2]); но они, очевидно, измѣнятся, если взять новый уголъ.

Итакъ отношенія тригонометрическихъ линій къ радіусу, взятыя со знаками направленія, суть дѣйствительно *функціи угла*, такъ какъ мѣняются вмѣстѣ съ угломъ и не зависятъ отъ длины радіуса.

4) Изъ §§ 6 и 8 видно, что уголъ и дуга могутъ выражаться однимъ и тѣмъ же числомъ; поэтому *тригонометрическія функціи угловъ* суть также и *тригонометрическія функціи дугъ*, понимая подъ словомъ «дуга» число, выражающее дугу въ доляхъ окружности или въ доляхъ радіуса. Такимъ образомъ за аргументъ тригонометрической функціи можно безразлично принимать уголъ и дугу, чѣмъ мы и будемъ пользоваться въ дальнѣйшихъ выводахъ.

17. Названія и обозначенія. Каждая изъ тригонометрическихъ функцій имѣетъ особое названіе и обозначеніе: они помѣщены въ прилагаемой ниже таблицѣ — по порядку тригонометрическихъ линій въ § 14. [Въ этой таблицѣ подстрочныя цифры при α указываютъ, въ какомъ квадрантѣ оканчивается уголъ; обозначенія R, BC, OE и т. д. имѣютъ тотъ же смыслъ, что и въ геометріи,

---

[1]) А также и дуги — при линейномъ измѣреніи.

[2]) Для отдѣльныхъ случаевъ доказательство можно вести подробнѣе (см. § *19*).

т.-е. означаютъ *длину* радіуса, перпендикуляра, перваго отрѣзка сѣкущей и т. д., разсматриваемую непосредственно, или *число, выражающее длину*[1])].

№	Названія.	Обозначенія.	Примѣры (см. черт. § 14).
1	синусъ	sn	$\text{sn}\,\alpha_{I}=\frac{OD}{R}$; $\text{sn}\,\alpha_{IV}=-\frac{BC}{R}$
2	косинусъ	cs	$\text{cs}\,\alpha_{II}=-\frac{OC}{R}$; $\text{cs}\,\alpha_{IV}=\frac{BD}{R}$
3	тангенсъ	tg	$\text{tg}\,\alpha_{III}=\frac{AE}{R}$; $\text{tg}\,\alpha_{IV}=-\frac{AE}{R}$
4	котангенсъ	ctg	$\text{ctg}\,\alpha_{I}=\frac{A_1F}{R}$; $\text{ctg}\,\alpha_{II}=-\frac{A_1F}{R}$
5	секансъ	sc	$\text{sc}\,\alpha_{III}=-\frac{OE}{R}$; $\text{sc}\,\alpha_{IV}=\frac{OE}{R}$
6	косекансъ	csc	$\text{csc}\,\alpha_{II}=\frac{OF}{R}$; $\text{csc}\,\alpha_{III}=-\frac{OF}{R}$

Предоставляемъ самому учащемуся составить словесное опредѣленіе для каждой тригонометрической функціи[2]).

Замѣчаніе. Вмѣсто «*тригонометрическія функціи*» для краткости часто будемъ говорить просто «*функціи*».

18. Изложенное выше пояснимъ еще числовыми примѣрами.

1. *Уголъ α оканчивается въ III четверти; первый отрѣзокъ сѣкущей въ 5 разъ длиннѣе радіуса; требуется вычислить тригонометрическую функцію.* Соотвѣтствующая функція, *секансъ*, будетъ отрицательна[3]), такъ какъ данный отрѣзокъ сѣкущей и подвижной радіусъ лежатъ по разныя стороны центра; отношеніе отрѣзка къ радіусу равно 5. Такимъ образомъ $\text{sc}\,\alpha=-5$.

2. *Уголъ β оканчивается во II четверти; при радіусѣ равномъ 3 вершк. второй отрѣзокъ сѣкущей содержитъ 5 вершк.; требуется вычислить тригонометрическую функцію.* Эта функція, *косекансъ*,

---

[1]) Это число, конечно, *абсолютное*.

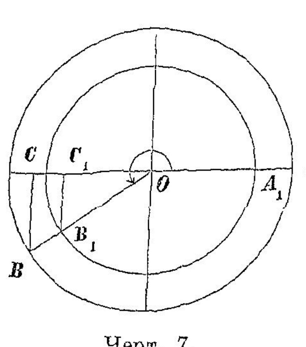
[2]) Напримѣръ: *тангенсомъ угла или дуги называется положительное или отрицательное количество, выражающее направленіе и отношеніе къ радіусу отрѣзка первой касательной;* и т. п.

[3]) Точнѣе: будетъ имѣть отрицательное значеніе.

будетъ положительна, такъ какъ данный отрѣзокъ сѣкущей идетъ (изъ центра) въ одну сторону съ подвижнымъ радіусомъ; отношеніе этого отрѣзка къ радіусу равно $\frac{5}{3}$. Итакъ $\csc\beta = \frac{5}{3}$.

3. *Уголъ γ оканчивается въ IV четверти; при радіусѣ равномъ 10 дюйм. отрѣзокъ второй касательной содержитъ 1 футъ 2 дюйма, вычислить тригонометрическую функцію.* Эта функція, *котангенсъ*, будетъ отрицательна, такъ какъ данный отрѣзокъ направленъ влѣво отъ точки касанія; его *отношеніе* къ радіусу равно 1,4. Итакъ $\operatorname{ctg}\gamma = -1,4$.

19. Замѣчаніе. Въ § 16 п. 3 было поставлено на видъ, что *тригонометрическія функціи не зависятъ отъ длины радіуса*, и эта теорема была доказана лишь въ общихъ чертахъ. Для частныхъ случаевъ доказательство можно дать нагляднѣе.



Черт. 7.

Возьмемъ для примѣра синусъ угла III четверти ($A_1OB_1 = AOB = \alpha$).

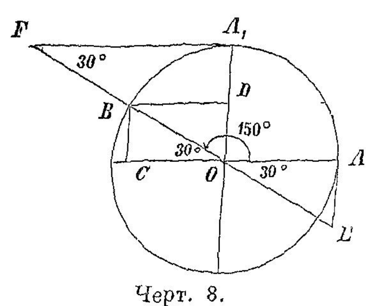
По чертежу 7 имѣемъ:

$$\operatorname{sn}\alpha = -\frac{BC}{R} \quad \text{и} \quad \operatorname{sn}_1\alpha = -\frac{B_1C_1}{R_1}.$$

Но изъ подобія тр-ковъ OB_1C_1 и OBC слѣдуетъ, что $\frac{B_1C_1}{R_1} = \frac{BC}{R}$;

отсюда: $-\frac{B_1C_1}{R_1} = -\frac{BC}{R}$ или $\operatorname{sn}_1\alpha = \operatorname{sn}\alpha$.

20. Примѣры вычисленія тригонометрическихъ функцій по данному углу. Не касаясь пока *общаго* вопроса, укажемъ, какъ для нѣкоторыхъ угловъ можно вычислить тригонометрическія функціи, примѣняя только ихъ опредѣленія, данныя въ § 17, и тѣ формулы, которыя сообщаются въ курсѣ геометріи.



Черт. 8.

Для примѣра возьмемъ уголъ $150°$ $\left(\text{или } \frac{5}{6}\pi\right)$.

Отложимъ его отъ общаго начала угловъ въ тригонометрическомъ кругѣ (длину радіуса можно брать какую угодно, такъ какъ

она не вліяетъ на тригонометрическія функціи); построимъ тригонометрическія линіи, съ помощью ихъ выразимъ функціи и вычислимъ полученныя отношенія.

1) $\sin 150° = \frac{BC}{R} = \frac{1}{2}$

$BC = \frac{1}{2}$ стороны правильнаго вписаннаго шестиугольника $= \frac{R}{2}$.

2) $\cos 150° = -\frac{OC}{R}$ *) $= -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$OC =$ апоѳемѣ правильнаго вписаннаго шестиугольника $= \frac{1}{2}$ стороны правильнаго вписаннаго треугольника $(BD) = R\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3) $\operatorname{tg} 150° = -\frac{AE}{R} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

Треугольникъ AOE половина равносторонняго; въ полномъ треугольникѣ линія OA была бы высотой, а линія AE половиной основанія; поэтому $R = AE.\sqrt{3}$**). (Можно AE разсматривать еще какъ половину стороны правильнаго описаннаго шестиугольника).

4) $\operatorname{ctg} 150° = -\frac{A_1F}{R} = -\sqrt{3}$

Подобно предыдущему получимъ $A_1F = R\sqrt{3}$. (Можно также разсматривать A_1F какъ половину стороны прав. опис. треугольника).

5) $\sec 150° = -\frac{OE}{R} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

Разсматривая OE какъ сторону равносторонняго треугольника, найдемъ $R = \frac{OE}{2} \cdot \sqrt{3}$

6) $\operatorname{csc} 150° = \frac{OF}{R} = 2$

Разсматривая тр-къ A_1FO какъ половину равносторонняго, получимъ $OF = 2R$.

Вообще, если подвижной радіусъ отклоненъ отъ главныхъ діаметровъ на $30°$ и $60°$, то вычисленіе тригонометрическихъ

*) Какъ и въ § 17, здѣсь черезъ R, OC, AE и т. д. означена *длина линій*.

**) Въ равностороннемъ треугольникѣ высота равна половинѣ основанія, умноженной на $\sqrt{3}$

функцій связано съ правильными вписанными и описанными треугольниками и шестиугольниками и со свойствами равносторонняго треугольника.

Если подвижной радіусъ проходитъ посрединѣ четверти, то примѣняются формулы, относящіяся къ вписанному и описанному квадратамъ. Для такихъ угловъ функціи сходнаго названія (sn и cs, tg и ctg, sc и csc) имѣютъ одинаковую абсолютную величину.

21. Полезно запомнить слѣдующія функціи:

$$\text{sn}\,30^\circ=\frac{1}{2}=\text{cs}\,60^\circ$$

$$\text{cs}\,30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}=\text{sn}\,60^\circ$$

$$\text{tg}\,30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}=\text{ctg}\,60^\circ$$

$$\text{ctg}\,30^\circ=\sqrt{3}=\text{tg}\,60^\circ$$

$$\text{sn}\,45^\circ=\text{cs}\,45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{tg}\,45^\circ=\text{ctg}\,45^\circ=1$$

Зная, какъ выражаются (по радіусу) стороны правильныхъ вписанныхъ восьмиугольника, десятиугольника и двѣнадцатиугольника, найдемъ:

$$\text{sn}\,22^\circ\,30'=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}};\qquad \text{sn}\,18^\circ=\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1);$$

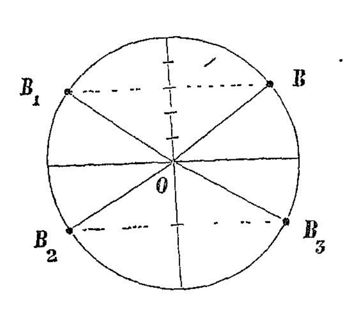
$$\text{sn}\,15^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right).$$

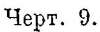
22. Построеніе подвижного радіуса по данной тригонометрической функціи. Задача состоитъ въ томъ, что дано значеніе какой-либо одной тригонометрической функціи и требуется найти соотвѣтствующее положеніе подвижного радіуса на тригонометрическомъ кругѣ.

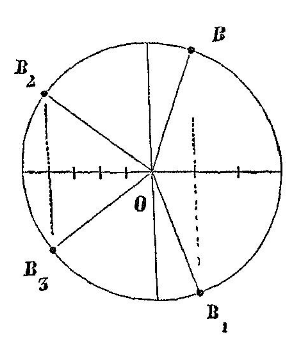
Рѣшеніе сводится къ слѣдующему: для круга можно взять какой угодно радіусъ, такъ какъ тригонометрическія функціи не связаны съ длиной радіуса; описавъ кругъ, строимъ тригонометрическую линію, для чего сообразуемся со знакомъ и абсолютной величиной даннаго значенія функціи; наконецъ переходимъ съ тригонометрической линіи на подвижной радіусъ. Разберемъ теперь отдѣльные случаи.

1 и 2) Положимъ $\text{sn}\,\alpha=\frac{3}{5}$. Синусу соотвѣтствуетъ вертикальная проекція подвижного радіуса; такъ какъ данный синусъ

положителенъ, то проекція направлена вверхъ отъ центра; по длинѣ она составляетъ $\frac{3}{5}$ радіуса. Построивъ вертикальную проекцію, изъ конца ея возставляемъ перпендикуляръ до пересѣченія съ окружностью и въ полученную точку проводимъ радіусъ; такъ какъ не указано, въ какую сторону долженъ итти перпендикуляръ, то задача допускаетъ два рѣшенія: OB и OB_1 (черт. 9).




Черт. 9.



Черт. 10

Если данъ косинусъ, то соображенія и построеніе подобны изложеннымъ [1]).

Чертежъ 9-й содержитъ построенія для случаевъ: $\operatorname{sn} \alpha = \frac{3}{5}$ и $\operatorname{sn} \alpha = -\frac{1}{2}$; чертежъ 10-й — для случаевъ: $\operatorname{cs} \alpha = \frac{1}{3}$ и $\operatorname{cs} \alpha = -\frac{4}{5}$.

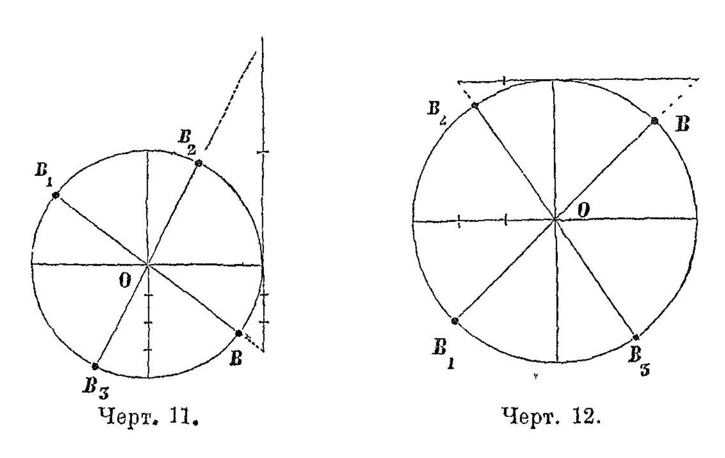
3 и 4) Пусть будетъ $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$. Тангенсу соотвѣтствуетъ отрѣзокъ первой касательной; въ данномъ случаѣ для полученія этого отрѣзка надо отложить внизъ отъ точки касанія часть равную $\frac{3}{4}$ радіуса. Конецъ отрѣзка долженъ приходиться на продолженіи

---

[1]) Возможенъ еще слѣдующій пріемъ. Изъ условія $\operatorname{sn} \alpha = \frac{3}{5}$ заключаемъ, что соотвѣтствующая точка окружности должна находиться выше горизонтальнаго діаметра и отстоять отъ него на $\frac{3}{5}$ радіуса. Такихъ точекъ двѣ: онѣ получатся на одной параллели къ горизонтальному діаметру.

Въ случаѣ косинуса надо проводить параллель къ вертикальному діаметру.

подвижного радіуса, при чемъ не указано, должно ли это быть продолженіе за конецъ дуги или за центръ (впередъ или назадъ); такимъ образомъ задача допускаетъ два рѣшенія; мы получимъ ихъ, проведя изъ конца касательной сѣкущую черезъ центръ: *OB и OB_1 (черт. 11) суть искомыя положенія подвижного радіуса* OB продолжается впередъ, OB_1 назадъ).



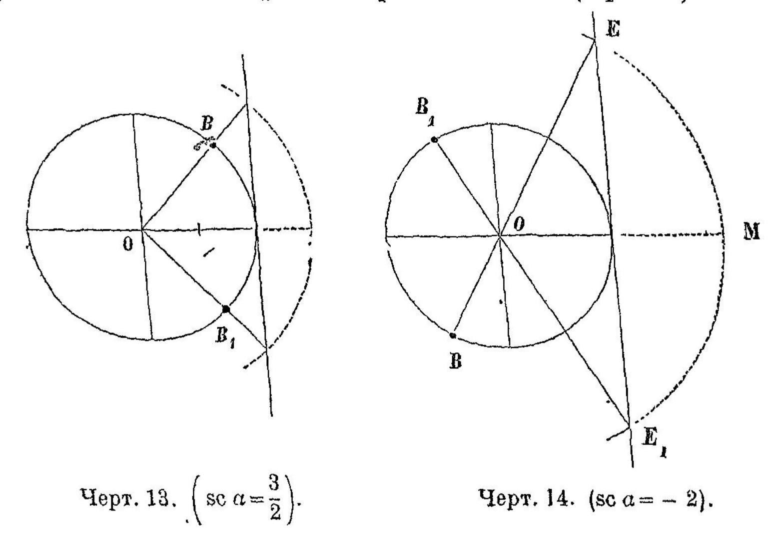
Черт. 11. Черт. 12.

Такое же разсужденіе примѣнимо и къ построенію подвижного радіуса по данному котангенсу.

Черт. 11-й содержитъ построенія для случаевъ: $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{3}{4}$ и $\operatorname{tg}\alpha=2$; черт. 12-й — для случаевъ: $\operatorname{ctg}\alpha=1$ и $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{2}{3}$.

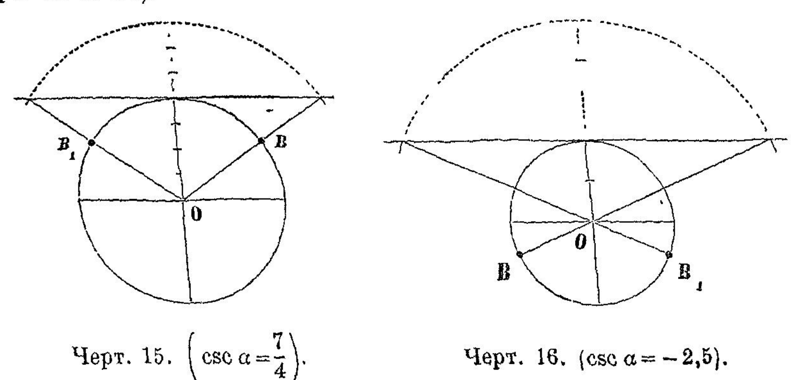
5 и 6) Положимъ $\operatorname{sc}\alpha=-2$. Секансу соотвѣтствуетъ первый отрѣзокъ сѣкущей; сначала отмѣримъ этотъ отрѣзокъ, удерживая то же самое начало (т.-е. центръ): для этого продолжимъ напр. горизонтальный діаметръ и отложимъ отъ центра часть $OM=2R$ (черт. 14); теперь повернемъ новую линію около центра такъ, чтобы ея конецъ пришелъ на первую касательную: получимъ два положенія тригонометрической линіи, OE и OE_1, которыя оба равно возможны. Чтобы перейти на подвижной радіусъ, обратимъ вниманіе на то, что данный секансъ отрицателенъ: это значитъ, что подвижной радіусъ и отрѣзокъ сѣкущей должны быть направлены въ разныя стороны отъ центра; поэтому OE и OE_1 продолжимъ за центръ до пересѣченія съ окружностью: искомыя положенія подвижного радіуса будутъ OB и OB_1.

Если данный секансъ положителенъ, то подвижной радіусъ слѣдуетъ взять на самой тригонометрической линіи (черт. 13).



Черт. 13. $\left(\text{sc}\,\alpha=\frac{3}{2}\right)$. Черт. 14. $(\text{sc}\,\alpha=-2)$.

Подобнымъ же образомъ поступаемъ и въ случаѣ косеканса (черт. 15 и 16).



Черт. 15. $\left(\text{csc}\,\alpha=\frac{7}{4}\right)$. Черт. 16. $(\text{csc}\,\alpha=-2{,}5)$.

23. ***Замѣчаніе I.*** Изъ предыдущаго видно, что значеніе тригонометрической функціи, взятое *отдѣльно* (безъ какого-либо еще условія), даетъ вообще *два* положенія подвижного радіуса (двѣ точки на окружности)*). Эти положенія въ случаѣ синуса и косе-

*) Исключеніемъ служатъ тѣ значенія, при которыхъ подвижной радіусъ получается на главномъ діаметрѣ.

канса симметричны относительно вертикальнаго діаметра, въ случаѣ косинуса и секанса симметричны относительно горизонтальнаго діаметра, въ случаѣ тангенса и котангенса составляютъ одну прямую линію.

Замѣчаніе II. Разсмотрѣнныя построенія показываютъ также, какія значенія возможны для каждой функціи, а именно: для синуса и косинуса отъ -1 до $+1$; для тангенса и котангенса отъ $-\infty$ до $+\infty$; для секанса и косеканса отъ $-\infty$ до -1 и отъ $+1$ до $+\infty$.

24. Измѣненія тригонометрическихъ функцій съ измѣненіемъ аргумента. Предположимъ, что аргументъ [1]) постепенно измѣняется отъ $-\infty$ до $+\infty$, и разсмотримъ соотвѣтствующій *ходъ* [2]) каждой функціи.

Каждому значенію аргумента соотвѣтствуетъ опредѣленное положеніе подвижного радіуса, вслѣдствіе чего предположенный выше ходъ аргумента равносиленъ непрерывному перемѣщенію подвижного радіуса въ положительномъ направленіи.

Но всѣ возможныя положенія подвижного радіуса исчерпываются въ теченіе одного полнаго оборота; при дальнѣйшемъ же вращеніи они будутъ повторяться, а отсюда произойдутъ повторенія и въ ходѣ каждой функціи [3]).

Поэтому сперва изслѣдуемъ, какъ измѣняются тригонометрическія функціи при одномъ полномъ оборотѣ подвижного радіуса (напр. при измѣненіи угла отъ 0 до 360°); послѣ этого опредѣлимъ, чѣмъ отличается ходъ каждой функціи, если его разсматривать *въ цѣломъ*.

25. ***Измѣненіе тригонометрическихъ функцій при возрастаніи угла отъ 0 до 360°.*** Воспользуемся чертежами § 14, а именно: представляя себѣ положительное вращеніе подвижного радіуса, будемъ слѣдить за перемѣнами въ направленіи и длинѣ тригонометрическихъ линій, а отсюда заключать объ измѣненіи тригонометрическихъ функцій.

---

[1]) Т.-е. уголъ или дуга.

[2]) Т.-е. смѣну значеній.

[3]) Напомнимъ, что тригонометрическія линіи строятся по данному положенію подвижного радіуса.

Результаты приведены въ прилагаемой таблицѣ: для каждой четверти въ аргументѣ и функціяхъ показаны только крайнія значенія; между ними функція или *только* увеличивается или *только* уменьшается.

Уголъ.	I 0 .... 90° (0 .... $\frac{1}{2}\pi$)	II 90°.... 180° ($\frac{1}{2}\pi$ ....π)	III 180°....270° (π .... $\frac{3}{2}\pi$)	IV 270°....360° ($\frac{3}{2}\pi$ .... 2π)
Синусъ	0 1	1 0	0 ... −1	−1..... 0
Косинусъ	1 0	0 .. −1	−1 0	0 1
Тангенсъ	0 .... ∞	−∞ .. 0	0 .... ∞	−∞ ...0
Котангенсъ	∞ 0	0 .. −∞	∞ 0	0 .. −∞
Секансъ	1 .... ∞	−∞ .. −1	−1 .. −∞	∞ 1
Косекансъ	∞ 1	1 .... ∞	−∞ .. −1	−1 .. −∞

26*. *Значенія функцій для концовъ четверти требуютъ особой оговорки*, такъ какъ ихъ нельзя получить прямо изъ опредѣленій, данныхъ въ §§ 16 и 14*).

Эти значенія получены, примѣняя слѣдующій *общій принципъ: если для даннаго значенія аргумента нельзя получить значеніе функціи прямо по опредѣленію, то отыскиваютъ предѣлъ, къ которому стремится функція, если аргументъ неопредѣленно приближается къ данному частному значенію; этотъ предѣлъ и принимаютъ за искомое значеніе функціи.*

Такъ, чтобы найти $\cos 90°$, надо начать съ угла, который немного болѣе или немного менѣе 90°, и приближая уголъ къ 90°, опредѣлить, къ какому предѣлу стремится при этомъ косинусъ; поступая такъ, получимъ $\cos 90° = +0$, если мы начали съ угла I четверти, и $\cos 90° = -0$, если мы начали съ угла II четверти. Такъ какъ $+0 = -0$, то знакъ опускаютъ и пишутъ $\cos 90° = 0$.

*) Напримѣръ, чтобы получить тангенсъ, надо сперва найти отрѣзокъ первой касательной; но въ случаѣ угла 90° такого отрѣзка не существуетъ, такъ какъ подвижной радіусъ и касательная параллельны.

Возьмемъ еще *tg* 90°. Поступая подобно предыдущему, найдемъ, что если уголъ неопредѣленно приближается къ 90°, то абсолютная величина тангенса неопредѣленно возрастаетъ, при чемъ получимъ $+\infty$, если 90° служитъ предѣломъ возрастающаго остраго угла, и $-\infty$, если 90° служитъ предѣломъ убывающаго тупого угла. Въ этомъ смыслѣ и пишутъ *tg* $90° = \pm\infty$ *).

27. Для наглядности приводимъ еще въ отдѣльной таблицѣ знаки функцій въ каждой четверти.

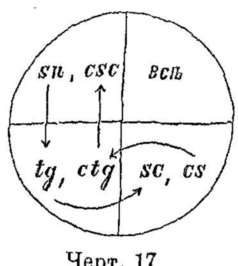
Четв.	sn	cs	tg	ctg	sc	csc
I	+	+	+	+	+	+
II	+	−	−	−	−	+
III	−	−	+	+	−	−
IV	−	+	−	−	+	− **)

28. 1. Изъ таблицы § 25 видно, какія значенія способна принимать каждая функція, а именно: синусъ и косинусъ отъ -1 до $+1$, тангенсъ и котангенсъ отъ $-\infty$ до $+\infty$ (т.-е. *всякое* значеніе), секансъ и косекансъ отъ $-\infty$ до -1 и отъ $+1$ до $+\infty$ (ср. § 23).

2. Относительно абсолютной величины функцій замѣчаемъ слѣдующее:

---

*) Что касается ctg 0, csc 0, ctg 360° и csc 360°, то и они получатъ двойной знакъ, если измѣненіе угла отъ 0 до 360° не будемъ выдѣлять изъ общаго хода аргумента: .... −90° .... 0 .... 90° .... 180° .... 270° .... 360° ... 450° ....



Черт. 17.

**) Такимъ образомъ въ I четверти всѣ функціи положительны, а въ каждой изъ остальныхъ четвертей двѣ функціи положительны и четыре отрицательны.

Какія функціи въ какой четверти положительны, легко запомнить по черт. 17, если надписывать функціи въ томъ порядкѣ, какой указанъ стрѣлками.

a) абсолютная величина синуса и косинуса не превышаетъ единицы; тангенсъ и котангенсъ могутъ имѣть какую угодно абсолютную величину; абсолютная величина секанса и косеканса не можетъ быть менѣе единицы.

b) въ I и III четвертяхъ абсолютная величина синуса, тангенса и секанса возрастаетъ, а прочихъ — убываетъ; во II и IV четвертяхъ наоборотъ [1]).

3. Каждая функція исчерпываетъ всѣ свои значенія на протяженіи двухъ четвертей [2]), а абсолютная величина функціи — на протяженіи одной четверти (напр. первой).

29*. ***Періодичность тригонометрическихъ функцій.*** Въ § 24 показано, что ходъ каждой тригонометрической функціи можно разложить на одинаковыя части, соотвѣтствующія одному обороту подвижного радіуса. Но, разсматривая таблицу § 25, замѣчаемъ, что въ случаѣ тангенса и котангенса ходъ функціи, соотвѣтствующій одному обороту, въ свою очередь состоитъ изъ двухъ одинаковыхъ частей, соотвѣтствующихъ каждая одному полуобороту: при возрастаніи угла отъ 180° до 360° тангенсъ и котангенсъ измѣняются такъ же, какъ и при возрастаніи угла отъ 0 до 180° [3]).

Такимъ образомъ, окончательно, ходъ тангенса и котангенса слагается изъ повтореній той части его, какая соотвѣтствуетъ измѣненію аргумента отъ 0 до 180°. Что касается синуса, косинуса, секанса и косеканса, то при одномъ оборотѣ въ ихъ ходѣ повтореній нѣтъ, такъ что для нихъ сдѣланное раньше заключеніе остается окончательнымъ.

Свойство функціи повторять свой *ходъ* черезъ равные промежутки въ аргументѣ, называется *періодичностью*, а *наименьшій*

---

[1]) Это легко запомнить въ такой формѣ: *возрастаютъ* (по абсолютной величинѣ, съ возрастаніемъ угла) *въ нечетныхъ четвертяхъ нечетные нумера функцій, а въ четныхъ — четные* (см. табл. § 17).

[2]) Таковы: для cs, tg, ctg и sc I и II четверть, для sn и csc II и III четверть.

[3]) Углы a и $a + 180°$ имѣютъ общій отрѣзокъ первой касательной (такъ какъ ихъ подвижные радіусы составляютъ одну прямую); слѣдоват. тангенсы этихъ угловъ равны. Подобное же вѣрно и для котангенсовъ. Отсюда слѣдуетъ, что напр. при углахъ: 180°, 180° 1″, 180° 2″, 180° 3″ и т. д. тангенсъ и котангенсъ имѣютъ тѣ же самыя значенія, какъ и при углахъ: 0, 1″, 2″, 3″ и т. д.

изъ такихъ промежутковъ[1]) называется *періодомъ* функціи. Такимъ образомъ тригонометрическія функціи суть періодическія; періодъ тангенса и котангенса есть 180°; періодъ синуса, косинуса, секанса, и косеканса есть 360°.

30. Возьмемъ *какое угодно* значеніе аргумента и соотвѣтствующее ему значеніе періодической функціи. Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что прибавляя къ аргументу нѣсколько періодовъ или вычитая, получимъ значеніе функціи равное первоначальному. И наоборотъ, если существуетъ такое *опредѣленное* количество, которое можно прибавить ко *всякому* значенію аргумента, не измѣняя тѣмъ значенія функціи, то можно показать, что эта функція періодическая[2]).

31. Періодичность тригонометрическихъ функцій можно выразить слѣдующими формулами:

1) $\operatorname{sn} \alpha = \operatorname{sn}(\alpha + 360^\circ . n)$ 2) $\operatorname{cs} \alpha = \operatorname{cs}(\alpha + 360^\circ . n)$
3) $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\alpha + 180^\circ . n)$ 4) $\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg}(\alpha + 180^\circ . n)$
5) $\operatorname{sc} \alpha = \operatorname{sc}(\alpha + 360^\circ . n)$ 6) $\operatorname{csc} \alpha = \operatorname{csc}(\alpha + 360^\circ . n)$

въ которыхъ α можно придать *какое угодно* значеніе, а n есть неопредѣленное цѣлое число (положительное или отрицательное).

Если дуга выражена въ доляхъ радіуса, то напишемъ:

$$\operatorname{sn} a = \operatorname{sn}(a + 2\pi . n), \quad \operatorname{tg} a = \operatorname{tg}(a + \pi . n) \quad \text{и т. д.}$$

---

[1]) Промежутки могутъ быть различной величины: напр., если синусъ повторяетъ свой ходъ по истеченіи каждыхъ 360°, то и по истеченіи каждыхъ 720°, 1080° и т. д. онъ повторяетъ тотъ ходъ, какой соотвѣтствуетъ 720°, 1080° и т. д.

[2]) При этомъ упомянутое постоянное количество есть или періодъ или кратное періода.

Для поясненія приведемъ примѣръ изъ алгебры. Возьмемъ $y = i^x$, означая черезъ i мнимую единицу и черезъ x перемѣнное *цѣлое* число. Если къ аргументу x прибавить 4, то y не измѣнится, такъ какъ это равносильно умноженію на i^4, что равно 1. Ходъ аргумента и функціи представляется въ слѣдующемъ видѣ:

y	...	1	i	—1	—i	1	i	—1	—i	1	i	...
x	...	—4	—3	—2	—1	0	1	2	3	4	5	...

Такимъ образомъ имѣемъ періодическое измѣненіе функціи съ періодомъ 4.

32*. Зависимость между тригонометрическими функціями одного и того же угла. Между тригонометрическими функціями одного и того же угла существуетъ зависимость, которую можно выразить слѣдующими *пятью* формулами:

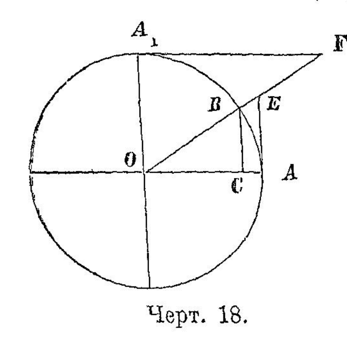
$$\mathrm{sn}^2\alpha+\mathrm{cs}^2\alpha=1\text{*)}\ \ (I);\quad \mathrm{tg}\,\alpha=\frac{\mathrm{sn}\,\alpha}{\mathrm{cs}\,\alpha}\ (II);\quad \mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{\mathrm{cs}\,\alpha}{\mathrm{sn}\,\alpha}\ (III);$$

$$\mathrm{sc}\,\alpha\,.\,\mathrm{cs}\,\alpha=1\ \ (IV);\quad \mathrm{csc}\,\alpha\,.\,\mathrm{sn}\,\alpha=1\ \ (V).$$

Эти формулы справедливы при *всѣхъ* значеніяхъ α.

Мы докажемъ ихъ сполна для угловъ первой четверти и объяснимъ, въ чемъ отличается ихъ выводъ для другихъ четвертей.

33*. Возьмемъ конецъ угла α въ первой четверти.



Черт. 18.

a) Изъ прямоугольнаго тр-ка OBC имѣемъ $BC^2+OC^2=OB^2$.

Раздѣливъ обѣ части на R^2, получимъ $\left(\frac{BC}{R}\right)^2+\left(\frac{OC}{R}\right)^2=\left(\frac{OB}{R}\right)^2$ или

$$\mathrm{sn}^2\,\alpha+\mathrm{cs}^2\,\alpha=1.$$

b) Остальныя формулы выводятся изъ *подобія* тр-ковъ, которые содержатъ линіи, соотвѣтствующія функціямъ.

Такъ для формулы II беремъ тр-ки OEA и OBC. Изъ ихъ подобія слѣдуетъ: $\frac{AE}{OA}=\frac{BC}{OC}$; раздѣливъ оба члена второго отношенія на R, получимъ: $\frac{AE}{OA}=\frac{BC}{R}\Big/\frac{OC}{R}$ или $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{\mathrm{sn}\,\alpha}{\mathrm{cs}\,\alpha}$.

c) Тр-къ FOA_1 подобенъ OBC, слѣдоват. $\frac{A_1F}{OA_1}=\frac{OC}{BC}$; отсюда $\frac{A_1E}{OA_1}=\frac{OC}{R}\Big/\frac{BC}{R}$ или $\mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{\mathrm{cs}\,\alpha}{\mathrm{sn}\,\alpha}$.

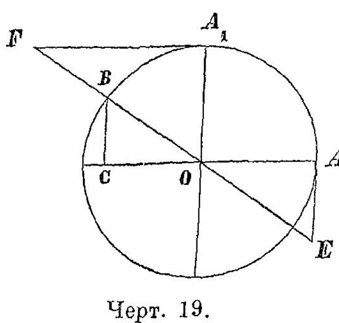
d) Подобіе тр-ковъ OEA и OBC даетъ: $\frac{OE}{OA}=\frac{OB}{OC}$; отсюда $\frac{OE}{OA}=\frac{OB}{R}\Big/\frac{OC}{R}$, т.-е. $\mathrm{sc}\,\alpha=\frac{1}{\mathrm{cs}\,\alpha}$ или $\mathrm{sc}\,\alpha\,.\,\mathrm{cs}\,\alpha=1$.

e) Тѣмъ же способомъ—изъ подобія тр-ковъ FOA_1 и OBC—получимъ $\mathrm{csc}\,\alpha\,.\,\mathrm{sn}\,\alpha=1$.

---

*) $\mathrm{sn}^2\,\alpha$ пишется вмѣсто $(\mathrm{sn}\,\alpha)^2$.

34*. Если уголъ α оканчивается не въ первой четверти, то выводъ отступаетъ отъ предыдущаго только тамъ, гдѣ встрѣчаются отрицательныя значенія функцій: тогда отношеніе тригонометрической линіи къ радіусу замѣнится не самой функціей, но функціей взятой со знакомъ *минусъ*. Чтобы пояснить сказанное, выведемъ формулы I, III и IV для угла второй четверти.



Черт. 19.

a) Изъ прямоугольнаго тр-ка OBC имѣемъ:

$$BC^2+OC^2=OB^2, \text{ откуда}$$

$$\left(\frac{BC}{R}\right)^2+\left(\frac{OC}{R}\right)^2=\left(\frac{OB}{R}\right)^2.$$

Теперь замѣтимъ, что $\frac{BC}{R}=\mathrm{sn}\,\alpha$, какъ и прежде, но $\frac{OC}{R}=-\mathrm{cs}\,\alpha$, потому что въ настоящемъ случаѣ $\mathrm{cs}\,\alpha=-\frac{OC}{R}$ *); $\frac{OB}{R}=1$. Такимъ образомъ $\mathrm{sn}^2\alpha+(-\mathrm{cs}\,\alpha)^2=1$, откуда $\mathrm{sn}^2\alpha+\mathrm{cs}^2\alpha=1$.

b) $\triangle FOA_1 \infty OBC$, слѣд. $\frac{A_1F}{OA_1}=\frac{OC}{BC}$; отсюда $\frac{A_1F}{OA_1}=\frac{OC}{R}\Big/\frac{BC}{R}$;

но $\frac{A_1F}{OA_1}=-\mathrm{ctg}\,\alpha$ **), $\frac{OC}{R}=-\mathrm{cs}\,\alpha$ и $\frac{BC}{R}=\mathrm{sn}\,\alpha$; такимъ образомъ

$$-\mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{-\mathrm{cs}\,\alpha}{\mathrm{sn}\,\alpha}, \quad \text{откуда} \quad \mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{\mathrm{cs}\,\alpha}{\mathrm{sn}\,\alpha}.$$

---

*) Выраженіе $-\mathrm{cs}\,\alpha$ по *виду* отрицательно, но по *значенію* оно для второй четверти положительно, такъ какъ $\mathrm{cs}\,\alpha$ здѣсь имѣетъ отрицательное значеніе (напр. если $\alpha=150°$, то по § 20 $\mathrm{cs}\,\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, слѣд. $-\mathrm{cs}\,\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$).

Вотъ еще нѣсколько случаевъ подобныхъ этому: 1) $\mathrm{cs}^3 100°$ имѣетъ отрицат. значеніе; 2) $\sqrt{\mathrm{sn}\,200°}$ есть количество мнимое; 3) $\sqrt{-\mathrm{cs}\,100°}$ есть количество дѣйствительное; 4) $\lg(\mathrm{tg}^2 300°)$ возможенъ, потому, что $\mathrm{tg}^2\alpha$ всегда положительно, но нельзя написать $\lg(\mathrm{tg}^2 300°)=2\lg\mathrm{tg}\,300°$, такъ какъ $\mathrm{tg}\,300°$ имѣетъ отрицательное значеніе; 5) если $a>b$, то $a\,.\,\mathrm{sn}\,100°>b\,.\,\mathrm{sn}\,100°$, но $a\,.\,\mathrm{sn}\,200°<b\,.\,\mathrm{sn}\,200°$; и т. д.

**) Получено изъ равенства $\mathrm{ctg}\,\alpha=-\frac{A_1F}{R}$.

c) $\triangle\ OEA \infty OBC$, поэтому $\frac{OE}{OA}=\frac{OB}{OC}$; отсюда $\frac{OE}{OA}=\frac{OB}{R}\Big/\frac{OC}{R}$; но $\frac{OE}{OA}=-\operatorname{sc}\alpha$, $\frac{OB}{R}=1$ и $\frac{OC}{R}=-\operatorname{cs}\alpha$; слѣд. $-\operatorname{sc}\alpha=\frac{1}{-\operatorname{cs}\alpha}$, откуда $\operatorname{sc}\alpha\,.\,\operatorname{cs}\alpha=1$.

35*. Кромѣ *основныхъ* формулъ полезно замѣтить еще слѣдующія, которыя можно получить уже какъ *производныя* изъ нихъ.

1) Перемножая соотвѣтственныя части равенствъ II и III (§ 32), будемъ имѣть $\operatorname{tg}\alpha\,.\operatorname{ctg}\alpha=1$*) (VI).

2) Дѣля равенство I на $\operatorname{cs}^2\alpha$ и примѣняя формулы II и IV, получимъ (если переставимъ слагаемыя первой части)

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\operatorname{sc}^2\alpha \qquad \text{(VII)}.$$

3) Дѣля равенство I на $\operatorname{sn}^2\alpha$ и примѣняя формулы III и V, найдемъ

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\operatorname{csc}^2\alpha \qquad \text{(VIII)}.$$

Такъ какъ основныя формулы вѣрны для всѣхъ угловъ, то и новыя три, какъ ихъ слѣдствіе, имѣютъ такое же свойство.

Замѣчаніе. Самостоятельно формула VI получается изъ подобія треугольниковъ, а формулы VII и VIII при помощи теоремы Пиѳагора (изъ прямоугольныхъ треугольниковъ).

35. ***Примѣры опредѣленія однѣхъ тригонометрическихъ функцій съ помощью другихъ.***

Примѣръ 1. Выразить $\operatorname{cs}\alpha$ черезъ $\operatorname{sn}\alpha$.

Рѣшеніе. a) Изъ формулы I имѣемъ $\operatorname{cs}^2\alpha=1-\operatorname{sn}^2\alpha$; слѣдов. абсол. величина $\operatorname{cs}\alpha$ равна абсол. величинѣ квадратнаго корня изъ $1-\operatorname{sn}^2\alpha$. Означая черезъ $\sqrt{1-\operatorname{sn}^2\alpha}$ положительное значеніе корня[1]) и соображая знаки косинуса[2]) въ разныхъ четвертяхъ, найдемъ: 1) для I и IV четверти $\operatorname{cs}\alpha=\sqrt{1-\operatorname{sn}^2\alpha}$ и 2) для II и III четверти $\operatorname{cs}\alpha=-\sqrt{1-\operatorname{sn}^2\alpha}$.

b) Если кромѣ значенія синуса ничего болѣе не извѣстно[3]), то о знакѣ косинуса можно сказать слѣдующее: какъ при

*) Мнемоническое замѣчаніе къ формуламъ IV, V и VI: *функціи* одного и того же угла) *равноудаленныя отъ концовъ* (ряда: sn, cs, tg, ctg, sc, csc) *даютъ въ произведеніи единицу.*

[1]) Въ такомъ же смыслѣ будемъ ставить знакъ $\sqrt{\ }$ и далѣе.

[2]) Т.-е. положительность или отрицательность его значеній.

[3]) Пусть напр. задача поставлена такъ: дано значеніе синуса; требуется найти значеніе косинуса, если онъ принадлежитъ тому же самому углу.

положительномъ, такъ и при отрицательномъ синусѣ косинусъ можетъ быть и положителенъ и отрицателенъ [1]); поэтому при всякомъ значеніи $\operatorname{sn}\alpha$ можно удержать для $\operatorname{cs}\alpha$ оба знака и написать $\operatorname{cs}\alpha=\pm\sqrt{1-\operatorname{sn}^2\alpha}$ *).

Примѣръ 2. Выразить $\operatorname{sn}\alpha$ черезъ $\operatorname{tg}\alpha$, если α оканчивается во II четверти.

Рѣшеніе. 1-й способъ. Изъ формулы II слѣдуетъ $\operatorname{sn}\alpha=\operatorname{tg}\alpha.\operatorname{cs}\alpha$; теперь опредѣлимъ $\operatorname{cs}\alpha$ съ помощью формулъ IV и VII

$$\operatorname{cs}^2\alpha=\frac{1}{\operatorname{sc}^2\alpha}=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha},\ \text{откуда}\ \operatorname{cs}\alpha=-\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}\ **);$$

подстановка въ первое равенство даетъ $\operatorname{sn}\alpha=-\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$ ***).

2-й способъ. По формуламъ VIII и VI имѣемъ:

$\operatorname{csc}^2\alpha=1+\operatorname{ctg}^2\alpha=1+\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}=\dfrac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha}$; отсюда на основаніи формулы V получимъ $\operatorname{sn}^2\alpha=\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$. Такимъ образомъ $\operatorname{sn}\alpha$ и $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$ имѣютъ одинаковую абсолютную величину, но во II четверти $\operatorname{sn}\alpha$ имѣетъ положительное значеніе, а $\operatorname{tg}\alpha$ (и слѣдов. вся дробь) отрицательное; поэтому для равенства дробь надо взять съ обратнымъ знакомъ, такъ что $\operatorname{sn}\alpha=-\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$.

Примѣръ 3. Дано $\operatorname{tg}\alpha=-\dfrac{3}{4}$. Вычислить функціи α.

Рѣшеніе. Начнемъ съ той функціи, которая въ произведеніи съ данной составляетъ единицу, въ настоящемъ случаѣ съ котангенса по форм. VI получимъ $\operatorname{ctg}\alpha=1:\left(-\dfrac{3}{4}\right)=-\dfrac{4}{3}$. Непо-

---

[1]) См. § 27, а также черт 9

*) Приписывая α къ sn и cs, мы здѣсь показываемъ только, что синусъ и косинусъ принадлежитъ одному и тому же углу, но при $+\sqrt{\ldots}$ значеніе α, конечно, *иное*, чѣмъ при $-\sqrt{\ldots}$

**) Знакъ минусъ получимъ, разсуждая какъ раньше [прим 1, а)]

***) Это равенство *съ виду* противорѣчитъ положительности синуса во II четверти, но не надо забывать, что во II четверти тангенсъ имѣетъ отрицательное значеніе, а потому вторая часть равенства *по значенію* положительна

редственно по тангенсу[1]) можно опредѣлить еще секансъ: а именно, о форм. VII будемъ имѣть $sc^2\alpha=1+\left(-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{25}{16}$; такъ какъ при отрицательномъ тангенсѣ секансъ можетъ быть и положительный и отрицательный[2]), то принимаемъ $sc\,\alpha=\pm\frac{5}{4}$. Далѣе по форм. IV находимъ $cs\,\alpha=1:\left(\pm\frac{5}{4}\right)=\pm\frac{4}{5}$. Для опредѣленія $sn\,\alpha$ возьмемъ формулу $\frac{sn\,\alpha}{cs\,\alpha}=tg\,\alpha$; при помощи ея получимъ $sn\,\alpha=$ $=tg\,\alpha\,.\,cs\,\alpha=\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\pm\frac{4}{5}\right)=\mp\frac{3}{5}$. Наконецъ по форм. V найдемъ $csc\,\alpha=1:\left(\mp\frac{3}{5}\right)=\mp\frac{5}{3}$.

Итакъ, — соблюдая соотвѣтствіе знаковъ, — будемъ имѣть слѣдующія *два*[3]) рѣшенія:

$tg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$	$sc\,\alpha$	$cs\,\alpha$	$sn\,\alpha$	$csc\,\alpha$
$-\frac{3}{4}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{5}{3}$
$-\frac{3}{4}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{3}$

Замѣчаніе. Для опредѣленія $sn\,\alpha$ формула II удобна тѣмъ, что при ней получилось и *соотвѣтствіе знаковъ;* между тѣмъ примѣняя формулу I, пришлось бы знаки синуса и косинуса *подбирать* (въ настоящемъ случаѣ они должны быть *разные*, такъ какъ тангенсъ отрицателенъ)[4]).

---

[1]) При имѣющихся формулахъ

[2]) См табл. § 27 и черт. 11.

[3]) Ср въ § 22 построеніе для случая $tg\,\alpha=-\frac{3}{4}$

[4]) Если бы знакъ тангенса не былъ извѣстенъ, то въ знакахъ синуса и косинуса были бы возможны *четыре* комбинаціи.

III. Формулы приведенія.

37. Перемѣна знака въ аргументѣ. Пусть α означаетъ *какой угодно* уголъ; тогда $-\alpha$ будетъ означать уголъ съ той же абсолютной величиной, но противоположный по знаку[1]). Сравнимъ функціи этихъ угловъ, а для этого образуемъ оба угла отъ общаго начала.

Представимъ себѣ, что два подвижныхъ радіуса отошли отъ общаго начала въ *разныя* стороны и — за исключеніемъ этого — вращаются одинаково; тогда, если одинъ опишетъ уголъ α, то другой опишетъ уголъ $-\alpha$.

Но при сказанномъ условіи подвижные радіусы каждый разъ симметричны относительно горизонтальнаго діаметра[2]); поэтому горизонтальная проекція у нихъ общая, а вертикальныя проекціи равны, но лежатъ по разныя стороны центра; слѣдовательно $\mathrm{cs}(-\alpha)$ и $\mathrm{cs}\,\alpha$ равны, а $\mathrm{sn}(-\alpha)$ и $\mathrm{sn}\,\alpha$ имѣютъ одинаковую абсолютную величину, но разные знаки, такъ что для равенства надо $\mathrm{sn}\,\alpha$ взять съ обратнымъ знакомъ. Такимъ образомъ:

$$\mathrm{sn}(-\alpha)=-\mathrm{sn}\,\alpha \quad (1); \qquad \mathrm{cs}(-\alpha)=\mathrm{cs}\,\alpha \quad (2).$$

Дѣля (1) на (2), а затѣмъ наоборотъ, получимъ:

$$\mathrm{tg}(-\alpha)=-\mathrm{tg}\,\alpha \quad (3), \qquad \mathrm{ctg}(-\alpha)=-\mathrm{ctg}\,\alpha \quad (4).$$

Дѣля единицу на каждую часть равенства (2), а затѣмъ на каждую часть равенства (1), найдемъ:

$$\mathrm{sc}(-\alpha)=\mathrm{sc}\,\alpha \quad (5); \qquad \mathrm{csc}(-\alpha)=-\mathrm{csc}\,\alpha \quad (6).$$

---

[1]) Напримѣръ: если $\alpha=-1050^\circ$, то $-\alpha=1050^\circ$, если $\alpha=40^\circ$, то $-\alpha=-40^\circ$, и т. д

[2]) Т.-е. расположены такъ, что, перегибая кругъ по горизонтальному діаметру, мы ихъ совмѣстимъ.

Итакъ, *въ случаѣ косинуса и секанса можно мѣнять знакъ аргумента, не измѣняя тѣмъ значенія функціи, а въ остальныхъ случаяхъ, мѣняя знакъ аргумента надо въ то же время измѣнить знакъ передъ функціей.*

Примѣры. 1) $\text{tg}(-40^\circ) = -\text{tg}\,40^\circ$; $\text{sc}(-40^\circ) = \text{sc}\,40^\circ$.

2) $\text{sn}(-1570^\circ) = -\text{sn}\,1570^\circ$; $\text{cs}(-1570^\circ) = \text{cs}\,1570^\circ$.

3) $\text{tg}\,300^\circ = -\text{tg}(-300^\circ)$.

4) $\text{csc}(\alpha - 90^\circ) = -\text{csc}(90^\circ - \alpha)$.

5) $-\text{sn}\,\frac{\alpha-\beta}{2} = -\left(-\text{sn}\,\frac{\beta-\alpha}{2}\right) = \text{sn}\,\frac{\beta-\alpha}{2}$.

38. Приведеніе тригонометрическихъ функцій всякаго угла къ функціямъ положительнаго остраго. Тригонометрическія функціи всякаго угла весьма просто выражаются съ помощью такихъ же или родственныхъ[1]) функцій угла положительнаго остраго. Покажемъ, какъ это достигается.

1. Сначала переходимъ на *положительный уголъ меньшій періода* (а слѣдовательно меньшій 360°); при этомъ надо различать два случая:

a) Если данный уголъ *положителенъ* (и болѣе періода), то вычитаемъ изъ него достаточное число періодовъ[2]) (§ 30); напр.

$\text{sn}\,1340^\circ = \text{sn}\,260^\circ$

$\text{cs}\,720^\circ = \text{cs}\,0$

$\text{tg}\,1070^\circ = \text{tg}\,170$

$\text{ctg}\,260^\circ = \text{ctg}\,80^\circ$

$$\begin{array}{r|l} 1340 & 360 \\ \underline{1080} & 3 \\ 260 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1070 & 180 \\ \underline{900} & 5 \\ 170 & \end{array}$$

b) Если данный уголъ *отрицателенъ*, то прибавляемъ къ нему достаточное число положительныхъ періодовъ[3]); напр.

$\text{tg}(-2200^\circ) = \text{tg}(-2200^\circ + 180^\circ \cdot 13) = \text{tg}\,140^\circ$

$\text{sn}(-1080^\circ) = \text{sn}(-1080^\circ + 360^\circ \cdot 3) = \text{sn}\,0$

$\text{sc}(-2600^\circ) = \text{sc}(-2600^\circ + 360^\circ \cdot 8) = \text{sc}\,280^\circ$.

$$\begin{array}{r|l} 2200 & 180 \\ \underline{400} & 12 \\ 40 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2600 & 360 \\ \underline{2520} & 7 \\ 80 & \end{array}$$

---

[1]) Родственными тригонометрическими функціями называютъ: sn и cs, tg и ctg, sc и csc

[2]) Короче. беремъ остатокъ отъ дѣленія даннаго угла на періодъ.

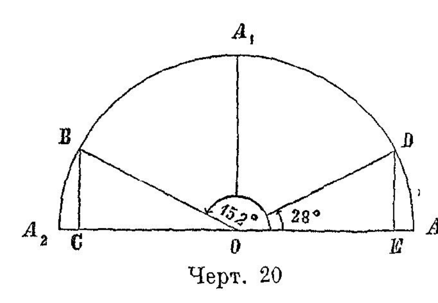
[3]) Вычисленіе производимъ такъ: абсолютную величину угла дѣлимъ на періодъ и, если получится остатокъ, беремъ дополненіе къ нему (до періода)

[Другой способъ: сначала измѣняемъ только *знакъ* аргумента, а затѣмъ поступаемъ какъ въ а); напримѣръ tg (—1030°)= —tg 1030° = —tg 130°].

2. Имѣя уголъ *между 0 и 360°*, пользуемся тѣми острыми углами, на которые подвижнымъ радіусомъ дѣлится соотвѣтствующій прямой уголъ между главными діаметрами; такъ для 152° эти углы суть 28° и 62°, и можно перейти на любой изъ нихъ, поступая какъ будетъ показано далѣе.

39. Чтобы замѣтить, какъ примѣняются острые углы, образуемые подвижнымъ радіусомъ съ главными діаметрами, разберемъ нѣсколько примѣровъ (при этомъ для синуса и косинуса будемъ дѣлать построеніе, а остальныя функціи выражать съ ихъ помощью).

1. Пусть будетъ $\angle AOB = 152°$; тогда $\angle A_1OB = 62°$ и $\angle A_2OB = 28°$.



Черт. 20

а) Перейдемъ на 28°. Чтобы составить функціи этого угла, надо сперва его *отложить отъ общаго начала:* пусть будетъ $\angle AOD = 28°$; проведя перпендикуляры BC и DE, получимъ равные треугольники OBC и ODE.

Линія BC равна линіи DE, слѣдов. sn 152° имѣетъ такую же абсолютную величину, какъ и sn 28°; кромѣ того оба синуса одинаковы по знаку; такимъ образомъ sn 152° = sn 28°.

Изъ равенства линій OC и OE*) слѣдуетъ, что абсолютная величина cs 152° равна абсолютной величинѣ cs 28°; но cs 28° имѣетъ положительное значеніе, а cs 152° отрицательное; поэтому cs 152° равенъ cs 28° взятому съ обратнымъ знакомъ[1]), т.-е.

cs 152° = —cs 28°.

Изъ выведенныхъ равенствъ слѣдуетъ (ср. § 37):

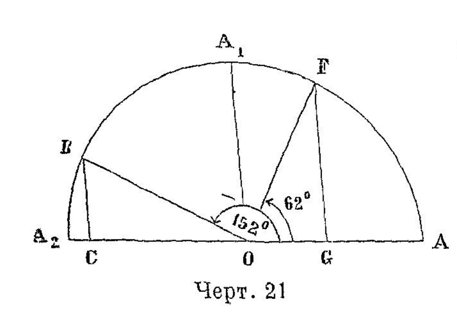
tg 152° = —tg 28°; ctg 152° = —ctg 28°
cs 152° = —sc 28°; csc 152° = csc 28°.

---

*) Изъ одинаковости ихъ *длины*.

[1]) И наоборотъ: cs 28° равенъ cs 152° взятому съ обратнымъ знакомъ (cs 28° = — cs 152°).

b) Перейдемъ на 62°. Отложивъ отъ общаго начала $\angle AOF=$ 62° и проведя перпендикуляры BC и FG, получимъ равные треугольники OBC и FOG.



Черт. 21

Изъ равенства линій BC и OG слѣдуетъ, что абсолютная величина sn 152° равна абсолютной величинѣ cs 62°; притомъ обѣ функціи положительны; слѣдовательно

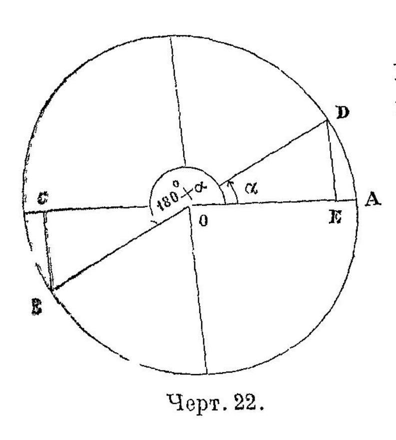
$$\text{sn } 152° = \text{cs } 62°$$

Такъ какъ линія OC равна FG, то абсолютная величина cs 152° равна абсолютной величинѣ sn 62°; но sn 62° положителенъ, а cs 152° отрицателенъ; слѣдовательно cs 152° равенъ sn 62° взятому съ обратнымъ знакомъ, т.-е.

$$\text{cs } 152° = -\text{sn } 62°.$$

Изъ выведенныхъ равенствъ слѣдуетъ:

$$\text{tg } 152° = -\text{ctg } 62°; \quad \text{ctg } 152° = -\text{tg } 62°$$
$$\text{sc } 152° = -\text{csc } 62°; \quad \text{csc } 152° = \text{sc } 62°.$$



Черт. 22.

2. Пусть будетъ $\angle AOB=$ $180°+\alpha$. Поступая какъ раньше, найдемъ, что sn $(180°+\alpha)$ и cs $(180°+\alpha)$ по абсолютной величинѣ соотвѣтственно равны sn α и cs α; но эти функціи положительны, а первыя двѣ отрицательны; слѣдовательно

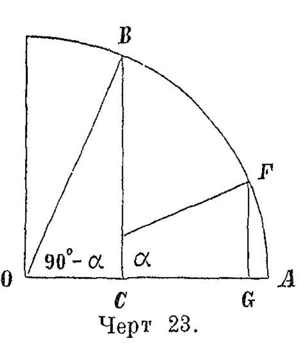
$$\text{sn }(180°+\alpha) = -\text{sn } \alpha$$
$$\text{cs }(180°+\alpha) = -\text{cs } \alpha$$

отсюда $\text{tg }(180°+\alpha) = \text{tg } \alpha$ *)

и т. д.

*) Это равенство можно получить также по § 31.

3. Для $\angle AOB = 90° - \alpha$ *) разсуждаемъ такъ: его функціи и функціи угла α одинаковы по знаку (положительны); слѣдовательно остается сравнить ихъ абсолютныя величины. Соображая какъ въ примѣрѣ 1 b), найдемъ:



Черт 23.

$$\mathrm{sn}\,(90° - \alpha) = \mathrm{cs}\,\alpha$$

$$\mathrm{cs}\,(90° - \alpha) = \mathrm{sn}\,\alpha$$

отсюда $\mathrm{tg}\,(90° - \alpha) = \mathrm{ctg}\,\alpha$; и т. д.

(Вообще: функціи положительнаго остраго угла равны родственнымъ функціямъ его дополненія до 90°).

40. Въ разобранныхъ примѣрахъ обратимъ вниманіе на слѣдующее: примѣняемые острые углы оба содержатся въ тр-кѣ OBC, и отложеніе ихъ отъ начальнаго радіуса вмѣстѣ съ послѣдующимъ построеніемъ равносильно перенесенію того же тр-ка въ новое положеніе; при этомъ вертикальныи и горизонтальныи катеты такими же и останутся, если построеніе дѣлается для угла, который былъ при горизонтальномъ діаметрѣ; если же примѣняется другой уголъ, то съ перенесеніемъ тр-ка вертикальный катетъ сдѣлается горизонтальнымъ, и обратно.

Въ первомъ случаѣ названія функціи сохранятся, во второмъ случаѣ данныя функціи замѣнятся *родственными*. Далѣе, всѣ тригонометрическія функціи въ I четверти положительны, поэтому въ тѣхъ случаяхъ, когда приводимая функція имѣетъ отрицательное значеніе, слѣдуетъ передъ функціей остраго угла ставить минусъ.

Замѣчаніе. Если построеніемъ будемъ пользоваться не только для синуса и косинуса, но и для остальныхъ функцій, то тр-ковъ получимъ три, и построеніе, которое сдѣлаемъ для остраго угла, будетъ также лишь новымъ размѣщеніемъ тѣхъ же самыхъ треугольниковъ **).

---

*) Для такого угла излагаемыи переходъ имѣетъ цѣлью или измѣн название функціи или уменьшить острый уголъ (если $90° - \alpha > \alpha$)

**) Предлагаемъ учащемуся сдѣлать соотвѣтствующіе чертежи (для первоначальнаго угла и обоихъ острыхъ — на отдѣльныхъ равныхъ кругахъ).

41. Правило Изъ §§ 39 и 40 вытекаетъ слѣдующее практическое правило. Переходя на острый уголъ, надо: 1) *поставить минусъ передъ функціей остраго угла, если приводимая функція отрицательна;* 2) *удержать названіе приводимой функціи, если острый уголъ взять съ горизонтальнаго діаметра, или замѣнить приводимую функцію родственной, если острый уголъ взять съ вертикальнаго діаметра.*

Примѣры (примѣненія правила).

1. *Привести къ острому углу ctg 300°.*

Данный уголъ переходитъ за вертикальный діаметръ на 30° (300°=270°+30°) и не доходитъ до горизонтальнаго на 60° (300°=360°—60°). Имѣя въ виду это и зная, что ctg 300° отрицателенъ, получимъ а) ctg 300°=—tg 30° и b) ctg 300°=—ctg 60°.

2. *Привести csc 170° къ острому углу не превышающему 45°.*

Такимъ угломъ служитъ уголъ 10°. Имѣя въ виду, что это есть уголъ при горизонтальномъ діаметрѣ и что csc 170° положителенъ, найдемъ csc 170°=csc 10°.

3. *Преобразовать функціи угла 270°—α (предполагая 0<α <90°).*

Уголъ α здѣсь считается отъ вертикальнаго діаметра; изъ функцій даннаго угла (III четв.) положительны только тангенсъ и котангесъ; такимъ образомъ

$$\mathrm{sn}\,(270°-\alpha)=-\mathrm{cs}\alpha;\qquad \mathrm{cs}\,(270°-\alpha)=-\mathrm{sn}\,\alpha$$
$$\mathrm{tg}\,(270°-\alpha)=\mathrm{ctg}\,\alpha;\qquad \mathrm{ctg}\,(270°-\alpha)=\mathrm{tg}\,\alpha$$
$$\mathrm{sc}\,(270°-\alpha)=-\mathrm{csc}\,\alpha\qquad \mathrm{csc}\,(270°-\alpha)=-\mathrm{sc}\,\alpha.$$

42. Итакъ тригонометрическія функціи всякаго угла приводятся къ функціямъ угла положительнаго остраго; при этомъ, благодаря двоякому его выбору, всегда возможно приведеніе къ углу не превышающему 45°.

Въ слѣдующихъ примѣрахъ примѣняются совмѣстно §§ 38 и 41.

1) $\mathrm{sn}\,2050°=\mathrm{sn}\,250°=-\mathrm{sn}\,70°=-\mathrm{cs}\,20°$

2050	360
1800	5
250	

2) $\mathrm{tg}\,(-1575°)=\mathrm{tg}\,45°=\mathrm{ctg}\,45°$ [§ 38. 1 b)]

1575	180
1440	8
135	

или — по другому способу:

$$\mathrm{tg}\,(-1575°)=-\mathrm{tg}\,1575°=-\mathrm{tg}\,135°=-(-\mathrm{tg}\,45°)=\mathrm{tg}\,45°$$
$$=-(-\mathrm{ctg}\,45°)=\mathrm{ctg}\,45°.$$

43. Для послѣдующаго прилагаемъ таблицу, въ которой сдѣлано приведеніе къ острому углу (α) во всѣхъ случаяхъ между 0 и 360°.

α	sn	cs	tg	ctg	sc	csc	
$90°-\alpha$	$\text{cs}\,\alpha$	$\text{sn}\,\alpha$	$\text{ctg}\,\alpha$	$\text{tg}\,\alpha$	$\text{csc}\,\alpha$	$\text{sc}\,\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$ *)
$90°+\alpha$	$\text{cs}\,\alpha$	$-\text{sn}\,\alpha$	$-\text{ctg}\,\alpha$	$-\text{tg}\,\alpha$	$-\text{csc}\,\alpha$	$\text{sc}\,\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$
$180°-\alpha$	$\text{sn}\,\alpha$	$-\text{cs}\,\alpha$	$-\text{tg}\,\alpha$	$-\text{ctg}\,\alpha$	$-\text{sc}\,\alpha$	$\text{csc}\,\alpha$	$\pi-\alpha$
$180°+\alpha$	$-\text{sn}\,\alpha$	$-\text{cs}\,\alpha$	$\text{tg}\,\alpha$	$\text{ctg}\,\alpha$	$-\text{sc}\,\alpha$	$-\text{csc}\,\alpha$	$\pi+\alpha$
$270°-\alpha$	$-\text{cs}\,\alpha$	$-\text{sn}\,\alpha$	$\text{ctg}\,\alpha$	$\text{tg}\,\alpha$	$-\text{csc}\,\alpha$	$-\text{sc}\,\alpha$	$\frac{3}{2}\pi-\alpha$
$270°+\alpha$	$-\text{cs}\,\alpha$	$\text{sn}\,\alpha$	$-\text{ctg}\,\alpha$	$-\text{tg}\,\alpha$	$\text{csc}\,\alpha$	$-\text{sc}\,\alpha$	$\frac{3}{2}\pi+\alpha$
$360°-\alpha$	$-\text{sn}\,\alpha$	$\text{cs}\,\alpha$	$-\text{tg}\,\alpha$	$-\text{ctg}\,\alpha$	$\text{sc}\,\alpha$	$-\text{csc}\,\alpha$	$2\pi-\alpha$

44. Общность формулъ приведенія. Формулы, полученныя въ §§ 37 и 43, — такъ называемыя *формы приведенія*, — обладаютъ общностью, т.-е. вѣрны при всѣхъ значеніяхъ α**). Докажемъ это.

Для формулъ § 37 доказательство уже имѣется, такъ какъ при ихъ выводѣ значеніе α ничѣмъ не было ограничено.

Но составляя таблицу § 43, мы означали черезъ α уголъ положительный острый; теперь разберемъ тѣ же виды аргумента, оставляя уголъ α совершенно произвольнымъ. Достаточно сдѣлать это для синуса и косинуса: остальное получится какъ слѣдствіе; кромѣ того формулы, содержащія разность, можно вывести изъ формулъ для суммы, разъ общность ихъ будетъ доказана: такъ,

---

*) Такъ будемъ имѣть: $\text{sn}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\text{cs}\,\alpha$; $\text{cs}\,(\pi+\alpha)=-\text{cs}\,\alpha$; и т. д.

**) Такъ въ таблицѣ § 43 значится $\text{sn}\,(270°+\alpha)=-\text{cs}\,\alpha$ въ предположеніи, что $0<\alpha<90°$, но подставляя напр. $\alpha=-500°$, получимъ $\text{sn}\,(270°-500°)=-\text{cs}\,(-500°)$, что оказывается также вѣрнымъ.

если формула $\cos(90°+\alpha)=-\sin\alpha$ есть *общая*, вѣрная для суммы 90° съ *какимъ угодно* угломъ, то взявъ 90° въ суммѣ съ угломъ $-\alpha$, получимъ $\cos[90°+(-\alpha)]=-\sin(-\alpha)$; преобразуя же $90°+(-\alpha)$ и примѣняя ко второй части *общую* формулу $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$, будемъ имѣть $\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha$.

Случаи въ аргументѣ приводимой функціи для доказательства видоизмѣнимъ и распредѣлимъ такъ:

1) $\pm\alpha+180°$, 2) $-\alpha+360°$, 3) $\pm\alpha+90°$ и 4) $\pm\alpha+270°$.

Переходимъ къ самому доказательству.

45. 1. a) Какой бы ни былъ уголъ, отъ присоединенія къ нему 180° подвижной радіусъ перейдетъ въ противоположную четверть и составитъ одну прямую съ прежнимъ своимъ положеніемъ (или: конецъ дуги перейдетъ въ точку діаметрально противоположную); слѣдовательно синусъ и косинусъ сохранятъ абсолютную величину, а знаки обоихъ измѣнятся*); поэтому

$$\sin(180°+\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\cos(180°+\alpha)=-\cos\alpha.$$

b) Примѣняя эти формулы къ углу $-\alpha$, получимъ

$$\sin(180°-\alpha)=-\sin(-\alpha)=\sin\alpha$$
$$\cos(180°-\alpha)=-\cos(-\alpha)=-\cos\alpha.$$

46. 2. Уголъ $-\alpha+360°$ имѣетъ *общія* стороны съ угломъ $-\alpha$; поэтому

$$\sin(360°-\alpha)=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\cos(360°-\alpha)=\cos(-\alpha)=\cos\alpha.$$

47*. 3. a) Если къ какому-либо углу прибавить 90°, то подвижной радіусъ перейдетъ въ слѣдующую четверть и составитъ съ вертикальнымъ діаметромъ такой же уголъ, какой раньше составлялъ съ горизонтальнымъ діаметромъ, и наоборотъ; поэтому его новая вертикальная проекція равна прежней горизонтальной, а новая горизонтальная проекція равна прежней вертикальной. Отсюда слѣдуетъ, что $\sin(\alpha+90°)$ и $\cos(\alpha+90°)$ имѣютъ такую же абсолютную величину, какъ $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$. Что же касается знаковъ,

---

*) То же самое происходитъ и при вычитаніи 180°, вообще если прибавляется или вычитается нечетное число полуоборотовъ.

то они таковы (въ зависимости отъ четверти, гдѣ оканчивается уголъ α):

$\alpha+90°$	sn	cs	α
II	+	+	I
III	—	—	II
IV	—	—	III
I	+	+	IV

$\alpha+90°$	cs	sn	α
II	—	+	I
III	—	+	II
IV	+	—	III
I	+	—	IV

Видимъ, что sn $(\alpha+90°)$ и cs α имѣютъ всегда одинаковые знаки, а cs $(\alpha+90°)$ и sn α противоположные.

Такимъ образомъ $\quad$ sn $(90°+\alpha)=$cs α

cs $(90°+\alpha)=-$sn α.

b) Примѣняя полученныя формулы къ углу $-\alpha$, найдемъ

sn $(90°-\alpha)=$cs $(-\alpha)=$cs α

cs $(90°-\alpha)=-$sn $(-\alpha)=$sn α.

48*. 4. a) Если къ какому-либо углу прибавить 270°, то подвижной радіусъ измѣнитъ свое *положеніе* такъ же, какъ отъ поворота на $-90°$. Поэтому вертикальная и горизонтальная проекціи обмѣняются длиной (ср. § 47), такъ что абсол. величины sn $(\alpha+270°)$ и cs $(\alpha+270°)$ соотвѣтственно равны абсол. величинамъ cs α и sn α. Чтобы сравнить *знаки*, предположимъ конецъ α послѣдовательно въ каждой четверти:

$\alpha+270°$	sn	cs	α
IV	—	+	I
I	+	—	II
II	+	—	III
III	—	+	IV

$\alpha+270°$	cs	sn	α
IV	+	+	I
I	+	+	II
II	—	—	III
III	—	—	IV

Видимъ, что sn $(\alpha+270°)$ и cs α имѣютъ всегда противоположные знаки, а cs $(\alpha+270°)$ и sn α одинаковые.

Такимъ образомъ $\text{sn}(270^\circ+\alpha)=-\text{cs}\,\alpha$

$\text{cs}(270^\circ+\alpha)=\text{sn}\,\alpha.$

b) Подстановка угла $-\alpha$ даетъ

$$\text{sn}(270^\circ-\alpha)=-\text{cs}(-\alpha)=-\text{cs}\,\alpha$$

$$\text{cs}(270^\circ-\alpha)=\text{sn}(-\alpha)=-\text{sn}\,\alpha.$$

49. Итакъ, дѣлая выводъ въ общемъ видѣ, мы получили такія же формулы, какія содержатся въ таблицѣ § 43.

Въ задачахъ, — *чтобы припомнить формулу*, — надо сперва представить себѣ α между 0 и 90° и примѣнить правило, данное въ § 41.

Примѣры (на §§ 44—49).

1) *Привести* $tg(90^\circ+300^\circ)$ *къ углу* 300°.

Если бы вмѣсто 300° былъ острый уголъ, то онъ былъ бы при вертикальномъ діаметрѣ и кромѣ того tg былъ бы отрицателенъ; слѣдовательно надо писать $\text{tg}(90^\circ+300^\circ)=-\text{ctg}\,300^\circ$.

2) *Преобразовать* $sn(\alpha-270^\circ)$.

Имѣемъ: $\text{sn}(\alpha-270^\circ)=-\text{sn}(270^\circ-\alpha)=-(-\text{cs}\,\alpha)=\text{cs}\,\alpha$.

3) *Преобразовать* $cs(\alpha+180^\circ.n)$, *гдѣ* n *есть неопредѣленное цѣлое число.*

a) Если n четное$=2k$, то $\text{cs}(\alpha+180^\circ.2k)=\text{cs}(\alpha+360^\circ.k)=\text{cs}\,\alpha$; b) если же n нечетное$=2k+1$, то $\text{cs}[\alpha+180^\circ.(2k+1)]=\text{cs}(180^\circ+\alpha+360^\circ.k)=\text{cs}(180^\circ+\alpha)=-\text{cs}\,\alpha$*).

Эти два случая можно *объединить* въ формулѣ

$$\text{cs}(\alpha+180^\circ.n)=(-1)^n.\text{cs}\,\alpha\ \text{**)}.$$

---

*) Или: a) при n четномъ концы дугъ $\alpha+180^\circ.n$ и α совпадаютъ, и потому $\text{cs}(\alpha+180^\circ n)=\text{cs}\,\alpha$; b) при n нечетномъ концы дугъ $\alpha+180^\circ.n$ и α діаметрально противоположны, и потому $\text{cs}(\alpha+180^\circ.n)=-\text{cs}\,\alpha$.

**) Такъ при $n=-4$ получимъ: $\text{cs}[\alpha+180^\circ(-4)]=(-1)^{-4}.\text{cs}\,\alpha$ или $\text{cs}(\alpha-180^\circ.4)=\frac{1}{(-1)^4}\text{cs}\,\alpha=\text{cs}\,\alpha$; и т. п.

IV. Примѣненіе таблицъ къ вычисленію тригонометрическихъ выраженій и къ нахожденію угловъ. Полученіе угла въ общемъ видѣ.

50. Вычисленіе нѣкоторыхъ выраженій, содержащихъ тригонометрическія функціи. Разберемъ нѣсколько примѣровъ на примѣненіе тригонометрическихъ таблицъ; при этомъ будемъ пользоваться лишь обыкновенными таблицами, т.-е. такими, которыя содержатъ *логариѳмы* тригонометрическихъ функцій (для угловъ отъ 0 до 90°)*).

Какъ найти логариѳмъ функціи, если данный уголъ *острый*,— излагается во введеніи къ таблицамъ, а потому здѣсь не будемъ повторять этого, предполагая, что учащійся уже освоился съ этимъ случаемъ при помощи самыхъ таблицъ.

Примѣры. 1) *Вычислить* $tg\ 19°50'24''$.

По тригонометрическимъ таблицамъ найдемъ $\lg tg\ 19°50'24''=9{,}55728-10$; къ этому логариѳму ищемъ соотвѣтствующее число **): получимъ $tg\ 19°50'24''=0{,}36081$.

2) *Вычислить* $x=cs\ 862°30'23''$.

Имѣемъ: $cs\ 862°\ 30'\ 23''=cs\ 142°\ 30'23''=-sn\ 52°\ 30'\ 23''$; такимъ образомъ $x=-sn\ 52°\ 30'\ 23''$ или $-x=sn\ 52°\ 30'\ 23''$. Теперь возьмемъ $\lg(-x)=\lg sn\ 52°\ 30'\ 23''=9{,}89950-10$; отсюда: $-x=0{,}79342$ или $x=-0{,}79342$.

Итакъ $cs\ 862°\ 30'\ 23''=-0{,}79342$.

---

*) Есть еще таблицы, гдѣ помѣщены не логариѳмы функцій, а самыя функціи (такъ назыв. *таблицы натуральныхъ тригонометрическихъ величинъ*).

**) Предполагаемъ, что учащіися умѣетъ уже примѣнять таблицы логариѳмовъ чиселъ.

3) *Вычислить* $\sqrt{tg^2 325^\circ}$ *).

Имѣемъ: $\sqrt{\mathrm{tg}^2 325^\circ}=\sqrt{(-\mathrm{tg}\,35^\circ)^2}=\sqrt{\mathrm{tg}^2 35^\circ}=\mathrm{tg}\,35^\circ$.

Далѣе поступаемъ какъ въ примѣрѣ 1.

4) *Вычислить* $x=\sqrt[5]{sn^3 205^\circ}$.

Имѣемъ: $\sqrt[5]{\mathrm{sn}^3 205^\circ}=\sqrt[5]{(-\mathrm{sn}\,25^\circ)^3}=\sqrt[5]{-\mathrm{sn}^3 25^\circ}=-\sqrt[5]{\mathrm{sn}^3 25^\circ}$;

такимъ образомъ $x=-\sqrt[5]{\mathrm{sn}^3 25^\circ}$ или $-x=\sqrt[5]{\mathrm{sn}^3 25^\circ}$.

Далѣе поступаемъ какъ въ примѣрѣ 2, а именно: находимъ $\lg(-x)=0{,}6\,.\,\lg\mathrm{sn}\,25^\circ=9{,}77557-10$; отсюда: $-x=0{,}59644$; $x=-0{,}59644$.

Итакъ $\sqrt[5]{\mathrm{sn}^3 205^\circ}=-0{,}59644$.

5) *Вычислить* $\sqrt{ctg\,156^\circ}$.

Имѣемъ: $\sqrt{\mathrm{ctg}\,156^\circ}=\sqrt{-\mathrm{ctg}\,24^\circ}=i\sqrt{\mathrm{ctg}\,24^\circ}$; съ помощью таблицъ найдемъ $\sqrt{\mathrm{ctg}\,24^\circ}=1{,}49869$.

Итакъ $\sqrt{\mathrm{ctg}\,156^\circ}=1{,}49869\,i$.

51. Нахожденіе табличнаго угла. Для этой цѣли данное значеніе функціи должно быть положительное. Уголъ опредѣляютъ по *логариѳму* функціи.

Способъ этого опредѣленія излагается обыкновенно при самыхъ таблицахъ; поэтому здѣсь будемъ считать его уже извѣстнымъ учащемуся и ограничимся только примѣромъ.

Примѣръ. Найти *табличный* уголъ x, если $\mathrm{cs}\,x=0{,}52437$.

Сначала возьмемъ $\lg\mathrm{cs}\,x=9{,}71964-10$; пользуясь этимъ логариѳмомъ, получимъ $x=58^\circ 22' 26''$.

52. Нахожденіе угловъ, содержащихся между 0 и 360°. Въ этой задачѣ будемъ пользоваться построеніемъ подвижного радіуса (§ 22) и формулами приведенія (§ 41). Разберемъ отдѣльные случаи на примѣрахъ, при чемъ, для удобства, удержимъ тѣ же самыя значенія функцій, какія были взяты въ § 22 **).

Изъ построеній видно, что между 0 и 360° получаются каждый разъ вообще *два* угла: въ слѣдующихъ примѣрахъ будемъ ихъ обозначать черезъ x_1 и x_2, а табличный уголъ черезъ φ.

---

*) Здѣсь и въ слѣдующихъ примѣрахъ *значеніе* корня предполагается *простѣйшее*.

**) Въ послѣдующемъ изложеніи надо имѣть въ виду чертежи § 22.

Примѣры. 1. a) $\operatorname{sn} x = \frac{3}{5}$. Между 0 и 360° имѣемъ $x_1 = \varphi$ и $x_2 = 180° - \varphi$; уголъ φ опредѣлится изъ условія $\operatorname{sn}\varphi = \frac{3}{5}$ *). Такимъ образомъ найдемъ $x_1 = 36°52'11'$ и $x_2 = 143°7'49''$.

b) $\operatorname{sn} x = -\frac{1}{2}$. Полагаемъ $x_1 = 180° + \varphi$ и $x_2 = 360° - \varphi$; тогда $\operatorname{sn} x = -\operatorname{sn}\varphi$; слѣдовательно $\operatorname{sn}\varphi = \frac{1}{2}$, откуда $\varphi = 30°$. Такимъ образомъ $x_1 = 210°$ и $x_2 = 330°$.

2. a) $\operatorname{cs} x = \frac{1}{3}$. Имѣемъ $x_1 = \varphi$ и $x_2 = 360° - \varphi$; $\operatorname{cs}\varphi = \frac{1}{3}$. Отсюда: $x_1 = 70°31'43''$ и $x_2 = 289°28'17''$.

b) $\operatorname{cs} x = -\frac{4}{5}$. Полагаемъ $x_1 = 180° - \varphi$ и $x_2 = 180° + \varphi$; тогда $\operatorname{cs} x = -\operatorname{cs}\varphi$, слѣдовательно $\operatorname{cs}\varphi = \frac{4}{5}$, откуда $\varphi = 36°52'12''$. Такимъ образомъ $x = 143°7'48''$ и $x_2 = 216°52'12''$.

3. a) $\operatorname{tg} x = 2$. Полагаемъ $x_1 = \varphi$ и $x_2 = 180° + \varphi$. Вычисливъ φ по $\operatorname{tg}\varphi = 2$, получимъ $x_1 = 63°26'6''$ и $x_2 = 243°26'6''$.

b) $\operatorname{tg} x = -\frac{3}{4}$. Полагая $x_1 = 180° - \varphi$ и $x_2 = 360° - \varphi$, будемъ имѣть $\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}\varphi$, слѣдовательно $\operatorname{tg}\varphi = \frac{3}{4}$, откуда $\varphi = 36°52'12''$. Окончательно: $x_1 = 143°7'48''$ и $x_2 = 323°7'48''$.

4. a) $\operatorname{ctg} x = 1$. Имѣемъ $x_1 = \varphi$ и $x_2 = 180° + \varphi$; $\operatorname{ctg}\varphi = 1$, $\varphi = 45°$; $x_1 = 45°$ и $x_2 = 225°$.

b) $\operatorname{ctg} x = -\frac{2}{3}$. Полагаемъ $x_1 = 180° - \varphi$ и $x_2 = 360° - \varphi$; тогда $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{ctg}\varphi$; слѣдовательно $\operatorname{ctg}\varphi = \frac{2}{3}$, откуда $\varphi = 56°18'36''$. Такимъ образомъ $x_1 = 123°41'24''$ и $x_2 = 303°41'24''$.

5 и 6. Въ случаѣ секанса и косеканса слѣдуетъ переходить на косинусъ и синусъ. Напримѣръ, если дано $\operatorname{sc} x = -2$, то сначала беремъ $\operatorname{cs} x = -\frac{1}{2}$ и отсюда уже найдемъ 120° и 240°.

---

*) $\operatorname{sn}\varphi = 0{,}6$, $\lg \operatorname{sn}\varphi = 9{,}77815 - 10$, $\varphi = 36°52'11''$.

Правило. Изъ сдѣланнаго разбора примѣровъ вытекаетъ слѣдующее правило: *беремъ для функціи только абсолютную величину даннаго значенія и находимъ табличный уголъ; искомые углы получимъ, если отложимъ найденный уголъ отъ горизонтальнаго діаметра въ тѣхъ четвертяхъ, гдѣ функція имѣетъ данный знакъ.*

Пусть, напримѣръ, $\operatorname{sn} x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; взявъ $\operatorname{sn} \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, получимъ $\varphi = 60^\circ$; синусъ отрицателенъ въ III и IV четверти; слѣдовательно, согласно правилу, будемъ имѣть: $x_1 = 180^\circ + 60^\circ = 240^\circ$ и $x_2 = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$.

Замѣчаніе. Въ предыдущихъ примѣрахъ уголъ φ вездѣ былъ введенъ такъ, что названіе функціи сохранялось; но, конечно, равно возможенъ и другой переходъ.

Напримѣръ, имѣя $\operatorname{cs} x = -\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$, удобно положить $x_1 = 90^\circ + \varphi$ и $x_2 = 270^\circ - \varphi$; тогда найдемъ: $\operatorname{cs} x = -\operatorname{sn} \varphi$; $\operatorname{sn} \varphi = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$, $\varphi = 18^\circ$; $x_1 = 108^\circ$ и $x_2 = 252^\circ$.

Для этого способа предыдущее правило измѣнится въ слѣдующемъ: если абсолютная величина даннаго значенія функціи берется для *родственной* функціи, то найденный табличный уголъ откладываютъ отъ *вертикальнаго* діаметра.

Пусть напр. $\operatorname{cs} x = -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$. Тогда соображаемъ такъ: $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ есть $\operatorname{sn} 22^\circ 30'$; косинусъ отрицателенъ во II и III четверти; поэтому будемъ имѣть $x_1 = 90^\circ + 22^\circ 30' = 112^\circ 30'$ и $x_2 = 270^\circ - 22^\circ 30' = 247^\circ 30'$.

53. Общій видъ угла для данной функціи. Если дано значеніе какой-либо *одной* функціи, то ему соотвѣтствуютъ *два* положенія подвижного радіуса; изъ нихъ на каждое приходится *безконечный рядъ* угловъ; такимъ образомъ уголъ, соотвѣтствующій данному значенію функціи, можетъ имѣть безконечное число различныхъ значеній. Найти *общій видъ* угла значитъ составить формулу (или нѣсколько формулъ), по которой можно получить *всѣ* эти значенія.

54. Положимъ, что сдѣлано построеніе и мы получили два подвижныхъ радіуса; пусть будетъ α какой-нибудь уголъ, соотвѣт-

ствующій первому подвижному радіусу, и β уголъ, соотвѣтствующій второму подвижному радіусу [1]).

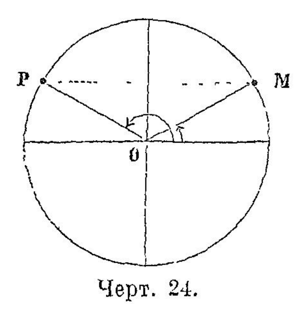
Тогда всѣ углы, содержащіе первый подвижной радіусъ, выразятся формулой $\alpha+360°.n$, а всѣ углы со вторымъ подвижнымъ радіусомъ войдутъ въ формулу $\beta+360°.n$ *). Такимъ образомъ совокупность формулъ $\alpha+360°.n$ и $\beta+360°.n$ представитъ рѣшеніе вопроса: давая n всѣ цѣлыя значенія отъ $-\infty$ до $+\infty$, мы получимъ всѣ значенія искомаго угла (*въ видѣ двухъ прогрессій*).

55*. Только что изложенный пріемъ есть совершенно *общій*. Теперь покажемъ: 1) какой выборъ α и β наиболѣе удобенъ въ примѣненіяхъ**) и 2) какія возможны упрощенія въ формулахъ въ зависимости *отъ* свойствъ самой функціи или отъ особенностей даннаго ея значенія.

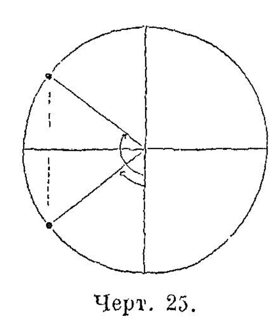
1) Что касается α и β, то берутъ значенія съ *наименьшей* абсолютной величиной, хотя бы и отрицательныя; 2) упрощеніе формулъ состоитъ въ томъ, что вмѣсто двухъ различныхъ прогрессій можетъ получиться только одна.

Перейдемъ къ разбору отдѣльныхъ случаевъ [2]).

56. Примѣры. *Въ последующемъ через φ означенъ табличный* уголъ и предполагается, что уголъ α по абсолютной величинѣ не болѣе угла β.



Черт. 24.


Черт. 25.

1. a) $\operatorname{sn} x=\frac{1}{2}$. По § 52 найдемъ $\alpha=30°$ и $\beta=150°$; слѣдов. будемъ имѣть $x_1=30°+360°.n$ и $x_2=150°+360°.n$. Эти двѣ

[1]) Таковы напр. углы, находимые въ § 52.

*) См. § 10.

**) Къ теоріи и задачамъ.

[2]) sc и csc разсматривать не будемъ.

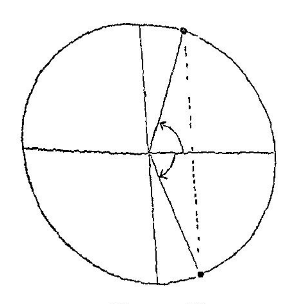
прогрессіи соотвѣтствуютъ: одна исключительно точкѣ M, другая исключительно точкѣ P; покажемъ, что рядъ, который содержалъ бы *всѣ* искомыя дуги, уже не будетъ прогрессіей. Дѣйствительно, начавъ напримѣръ съ дуги 30°, пойдемъ въ обѣ стороны, не пропуская ни M, ни P; получимъ:

конецъ дуги		P	M	P	M	P	M	P	....
дуга		−570°	−330°	−210°	30°	150°	390°	510°	....

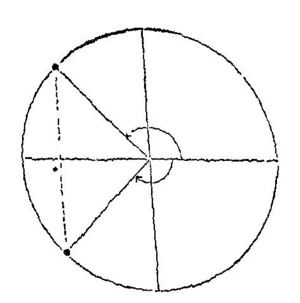
Вслѣдствіе того, что OM и OP не составляютъ одной прямой линіи, послѣдовательные переходы здѣсь не равны (*чередуются* 120° и 240°); такимъ образомъ *одной* прогрессіи не получимъ.

Сказанное относится и къ остальнымъ случаямъ, въ которыхъ подвижные радіусы составляютъ *ломаную* линію.

b) $\operatorname{sn} x = -\frac{4}{5}$. Полагаемъ $\alpha = -\varphi$ и $\beta = -(180° - \varphi)$; отсюда: $\operatorname{sn}\varphi = \frac{4}{5}$, $\varphi = 53°7'48''$. Такимъ образомъ: $\alpha = -53°7'48''$; $\beta = -126°52'12''$. Полное рѣшеніе есть: $x_1 = -53°7'48'' + 360°.n$; $x_2 = -126°52'12'' + 360°.n$.



Черт. 26.

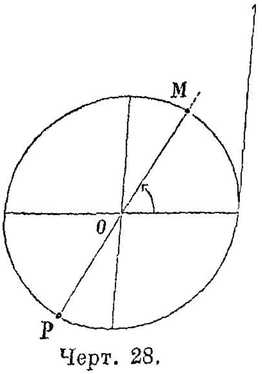


Черт. 27.

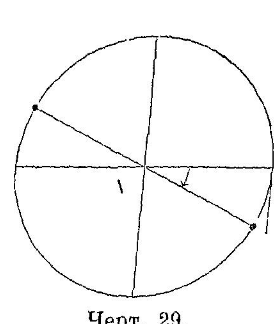
2. a) $\operatorname{cs} x = \frac{1}{3}$. Получимъ: $\alpha = \varphi$, $\beta = -\alpha$; $\operatorname{cs}\varphi = \frac{1}{3}$, $\varphi = 70°31'43''$. Такимъ образомъ $x_1 = 70°31'43'' + 360°.n$ и $x_2 = -70°31'43'' + 360°.n$.

b) $\operatorname{cs} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Имѣемъ: $\alpha = 180° - \varphi$, $\beta = -\alpha$, $\operatorname{cs}\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\varphi = 45°$; $\alpha = 135°$, $\beta = -135°$. Полное рѣшеніе есть: $x_1 = 135° + 360°.n$; $x_2 = -135° + 360°.n$.

3. a) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$. Такъ какъ въ случаѣ тангенса подвижные радiусы составляютъ одну прямую, то подбирая дуги послѣдовательно[1]), образуемъ рядъ, въ которомъ разность дугъ вездѣ оди-



Черт. 28.

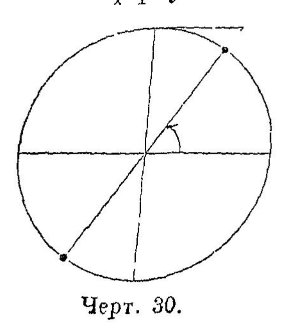


Черт. 29.

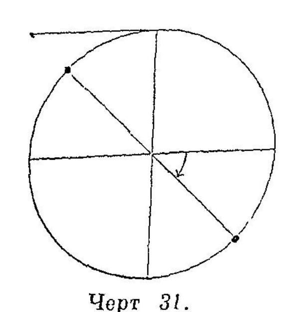
накова, а именно 180°. Возьмемъ за исходную дугу 60°; прибавляя къ ней по 180°, получимъ рядъ дугъ въ одну сторону; а вычитая по 180°, получимъ рядъ дугъ въ другую сторону:

конецъ дуги		P	M	P	M	P	M	P	....
д у г а		−480°	−300°	−120°	60°	240°	420°	600°	....

Имѣемъ прогрессiю съ разностью 180°; всѣ члены ея можно получить по формулѣ $x = 60° + 180° . n$.



Черт. 30.



Черт 31.

b) $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}$ *). Полагаемъ $\alpha = -\varphi$; тогда $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2}$. $\varphi = 26°33'54''$; слѣдовательно $\alpha = -26°33'54''$. Подобно предыдущему найдемъ $x = -26°33'54'' + 180° . n$.

---

[1]) Т.-е. идя въ одномъ направленiи и не пропуская ни M, ни P.

*) Сюда относится черт 29.

4. a) $\operatorname{ctg} x = \frac{2}{3}$. Находимъ $\alpha = 56°18'36''$. Разсуждая теперь такъ же, какъ въ случаѣ тангенса, получимъ $x = 56°18'36'' + 180°.n$.

b) $\operatorname{ctg} x = -1$. Имѣемъ: $\alpha = -\varphi$; $\operatorname{tg}\varphi = 1$, $\varphi = 45°$. Подобно предыдущему $x = -45° + 180°.n$.

57. Итакъ для тангенса или котангенса углы получаются *всегда* въ *одной* прогрессіи, съ разностью 180°. Какъ *исключеніе* можетъ получиться *одна* прогрессія и въ случаѣ синуса или косинуса[1]); *вообще* же для нихъ углы распредѣляются въ *двѣ* прогрессіи, съ разностью 360°.

Разсмотримъ теперь упомянутыя исключенія.

58. a) $\operatorname{sn} x = 0$. Нулевой синусъ соотвѣтствуетъ концамъ горизонтальнаго діаметра, слѣдовательно встрѣчается черезъ каждые 180°. Разсуждая какъ въ случаѣ тангенса, найдемъ $x = 0 + 180°.n$ или, короче $x = 180°.n$.

b) $\operatorname{sn} x = 1$. Соотвѣтствующее положеніе подвижного радіуса только *одно* (иногда его разсматриваютъ какъ *слитное*); *поэтому* и получится только одна прогрессія, съ разностью 360°. Такъ какъ $\alpha = 90°$, то $x = 90° + 360°.n$.

c) $\operatorname{sn} x = -1$. Разсуждая какъ въ b), будемъ имѣть: $\alpha = -90°$, $x = -90° + 360°.n$.

d) $\operatorname{cs} x = 0$. Это значеніе косинуса соотвѣтствуетъ концамъ вертикальнаго діаметра, слѣдовательно встрѣчается черезъ каждые 180°. Разсуждая какъ въ случаѣ тангенса, найдемъ: $\alpha = 90°$, $x = 90°$, то $x = 90° + 180°.n$.

e) $\operatorname{cs} x = 1$. Здѣсь только *одно* положеніе подвижного радіуса. Получимъ: $\alpha = 0$, $x = 0 + 360°.n$ или $x = 360°.n$.

f) $\operatorname{cs} x = -1$. Случай однородный съ e). Будемъ имѣть: $\alpha = 180°$, $x = 180° + 360°.n$.

59. Замѣчаніе. I. Въ § 56 п. 1 углы, соотвѣтствующіе данному синусу, были собраны въ двѣ прогрессіи; но ихъ можно выразить *и одной* формулой. Сдѣлаемъ это.

Въ п. 1 a) получено: $x_1 = 30° + 360°.n$ и $x_2 = 150° + 360°.n$; но $30° + 360°.n = 30° + 180°.2n$ и $150° + 360°.n = 180° - 30° + 360°.n = -30° + 180°.(2n+1)$. Знакъ при 30° зависитъ здѣсь

[1]) А именно въ случаяхъ: $\operatorname{sn} x = 0$; 1; -1 и $\operatorname{cs} x = 0$; 1: -1 (§ 58).

отъ четности ($2n$) или нечетности ($2n+1$) множителя при $180°$; эту зависимость можно указать съ помощью степени отрицательной единицы: а именно, полагаемъ $x=30°.(-1)^m+180°.m$, означая черезъ m неопредѣленное цѣлое число, безразлично четное или нечетное[1]).

Въ п. 1 b) получено:

$x_1=-53°\,7'48''+360°.n$ и $x_2=-126°52'12''+360°.n$.

Преобразуемъ эти выраженія:

$$x_1=-53°7'48''+180°.2n;$$

$$x_2=-(180°-53°7'48'')+180°.2n=53°7'48''+180°.(2n-1).$$

Теперь подобно предыдущему находимъ

$$x=(-53°7'48'').(-1)^m+180°.m.$$

II. Формулы, полученныя въ § 56 для случая косинуса, часто пишутъ слитно: такъ будемъ имѣть

въ п. 2 a) $x=\pm70°31'43''+360°.n$,

въ п. 2 b) $x=\pm135°+360°.n$*).

[1]) Развертывая новую формулу, получимъ уже не прогрессію, но тотъ рядъ, который приведенъ въ § 56 п. 1 a)

x		$-570°$	$-330°$	$-210°$	$30°$	$150°$	$390°$	$510°$	...
m	..	-3	-2	-1	0	1	2	3	...

*) Примѣняя эту формулу, получимъ слѣдующій рядъ:

x	...	$-495°$	$-225°$	$-135°$	$135°$	$225°$	$495°$	....
	.	-1		0		1		....

Здѣсь каждому значенію n соотвѣтствуютъ два значенія x

V. Формулы сложенія аргументовъ, вычитанія, умноженія и дѣленія.

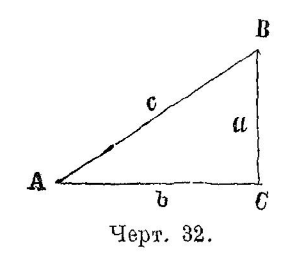
60. Нѣкоторыя изъ теоремъ о треугольникѣ. Сюда мы переносимъ четыре теоремы изъ отдѣла о рѣшеніи треугольниковъ: это дѣлаемъ для вывода, помѣщеннаго въ § 64.

Сначала укажемъ новыя обозначенія; а именно: во всякомъ треугольникѣ (ABC) принято обозначать величину угловъ тѣми же буквами, какъ и вершины (A,B,C), а длину противолежащихъ сторонъ одноименными малыми буквами (a,b,c); при этомъ обыкновенно предполагаютъ, что стороны измѣрены *одной и той* же единицей.

Перейдемъ теперь къ теоремамъ.

61. Теорема I. *Катетъ равенъ гипотенузѣ, умноженной на синусъ противолежащаго*[1]) *угла.*

Теорема II. *Катетъ равенъ гипотенузѣ, умноженной на косинусъ прилежащаго*[2]) *угла.*



Черт. 32.

Доказ. Сдѣлаемъ уголъ A центральнымъ, описавъ между его сторонами дугу радіусомъ c.

По опредѣленію синуса и косинуса получимъ $\frac{a}{c} = \mathrm{sn}\, A$ и $\frac{b}{c} = \mathrm{cs}\, A$;

отсюда $a = c\,.\,\mathrm{sn} A$ (теор. I)

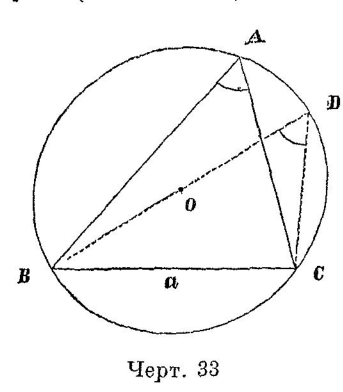
и $b = c\,.\,\mathrm{cs}\, A$ (теор. II).

---

[1]) Катету.

[2]) Къ катету.

62. Теорема III. *Во всякомъ треугольникѣ сторона равна діаметру описаннаго круга, умноженному на синусъ противолежащаго угла* ($a=2R\,.\,\mathrm{sn}\,A$).



Черт. 33

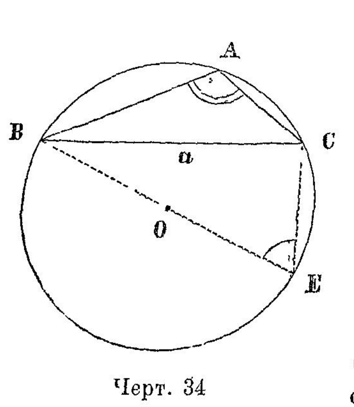
Доказ. Противолежащій (сторонѣ) уголъ можетъ представить три случая, которые и разберемъ отдѣльно.

1) Уголъ A острый. Включимъ a и $2R$ въ одинъ треугольникъ, напр. BDC. Такъ какъ уголъ BCD прямой, то по теоремѣ I

$$a=2R\,.\,\mathrm{sn}\,D;$$

но $\angle D=A$*); слѣдовательно

$$a=2R\,.\,\mathrm{sn}\,A.$$



Черт. 34

2) Уголъ A тупой. Поступая какъ раньше, найдемъ (изъ прямоугольнаго треугольника BCE)

$$a=2R\,.\,\mathrm{sn}\,E;$$

но $E+A=180°$, слѣдовательно $\mathrm{sn}\,E=\mathrm{sn}\,A$ (§ 39); подставляя получимъ

$$a=2R\,.\,\mathrm{sn}\,A.$$

3. Уголъ A прямой. Формула распространяется и на этотъ случай, какъ предѣльный для разсмотрѣнныхъ.

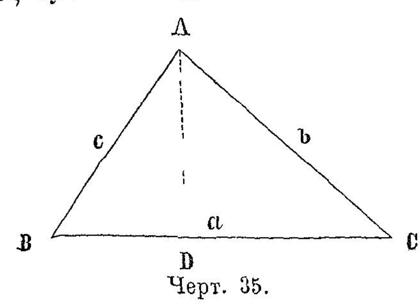
Замѣчаніе. Доказанную теорему выражаютъ еще такъ: *хорда равна діаметру, умноженному на синусъ опирающагося на нее вписаннаго угла.*

63. Теорема IV. *Во всякомъ треугольникѣ сторона равна суммѣ двухъ другихъ сторонъ, соотвѣтственно умноженныхъ на косинусъ угла, образуемаго съ первой стороной* ($a=c\,.\,\mathrm{cs}\,B+b\,.\,\mathrm{cs}\,C$).

Доказ. Разсмотримъ отдѣльно три случая въ углахъ при первой сторонѣ.

*) Тотъ и другой измѣряется половиной дуги BC.

1) Случай двухъ острыхъ угловъ. Проведя высоту AD, будемъ имѣть



Черт. 35.

$$a = BD + DC;$$

но по теоремѣ II

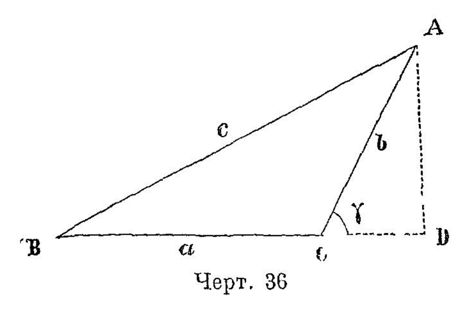
$BD = c \,.\, \mathrm{cs}\, B$ и $DC = b \,.\, \mathrm{cs}\, C$;

такимъ образомъ

$$a = c \,.\, \mathrm{cs}\, B + b \,.\, \mathrm{cs}\, C.$$

2. Случай тупого угла. Проведемъ высоту AD; теперь она пройдетъ *внѣ* треугольника, и мы получимъ:

$$a = BD - CD.$$



Черт. 36

Изъ треугольниковъ BAD и CAD найдемъ

$BD = c \,.\, \mathrm{cs} B$ и $CD = b \,.\, \mathrm{cs}\gamma$.

Чтобы исключить γ, замѣтимъ, что $\gamma + C = 180^\circ$, а потому $\mathrm{cs}\gamma = -\mathrm{cs}\, C$ (см. подстрочное примѣчаніе къ § 39).

Подставляя получимъ

$$a = c \,.\, \mathrm{cs} B - [b \,.\, (-\mathrm{cs}\, C)] = c \,.\, \mathrm{cs}\, B + b \,.\, \mathrm{cs}\, C.$$

3) Случай прямого угла не требуетъ особаго доказательства, такъ какъ онъ предѣльный для каждаго изъ разсмотрѣнныхъ.

64*. Синусъ суммы двухъ угловъ (или дугъ). Докажемъ, что

$$\mathrm{sn}(\alpha + \beta) = \mathrm{sn}\,\alpha \,.\, \mathrm{cs}\,\beta + \mathrm{cs}\,\alpha \,.\, \mathrm{sn}\,\beta,$$

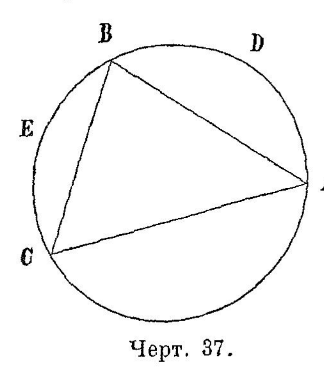
каковы бы ни были значенія α и β.

Доказ. Пусть будутъ α и β двѣ дуги любой величины и знака[1]). По окружности произвольнаго радіуса опишемъ *послѣдовательно* 2α и 2β *): пусть будутъ A и B начало и конецъ дуги 2α, B и C начало и конецъ дуги 2β; тогда A и C будутъ начало и конецъ дуги $2\alpha + 2\beta$.

*) Напримѣръ $\alpha = 600^\circ$. $\beta = -130^\circ$ и т. д.

[1]) Цѣль *удвоенія* дугъ будетъ видна впослѣдствіи.

I. Хорду, соотвѣтствующую суммѣ дугъ, выразимъ съ помощью хордъ, соотвѣтствующихъ слагаемымъ дугамъ: а именно по § 63 найдемъ



Черт. 37.

$$b = c\,.\,\mathrm{cs}A + a\,.\,\mathrm{cs}C.$$

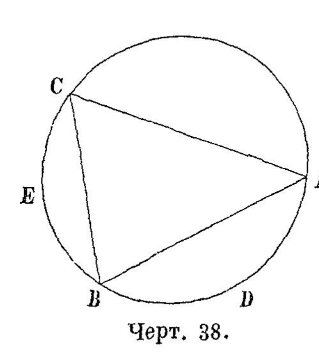
Выразимъ здѣсь стороны треугольника черезъ діаметръ описаннаго круга:

$2R\,.\,\mathrm{sn}B = 2R\,.\,\mathrm{sn}C\,.\,\mathrm{cs}A + 2R\,.\,\mathrm{sn}A\,.\,\mathrm{cs}C$;
отсюда $\mathrm{sn}\,B = \mathrm{sn}\,C\,.\,\mathrm{cs}\,A + \mathrm{cs}\,C\,.\,\mathrm{sn}\,A$.

Такъ какъ $B + (C + A) = 180°$, то $\mathrm{sn}\,B = \mathrm{sn}\,(C + A)$, и предыдущее равенство замѣнится такимъ:

$$\mathrm{sn}(C + A) = \mathrm{sn}\,C\,.\,\mathrm{cs}A + \mathrm{cs}C\,.\,\mathrm{sn}A\ ^{*}). \qquad (M)$$

II. Перейдемъ теперь отъ угловъ треугольника ABC къ даннымъ дугамъ α и β.



Черт. 38.

Углы C и A измѣряются половинами своихъ внутреннихъ дугъ, — при условіи, что въ этихъ дугахъ берется только абсолютная величина; но чтобы связать тѣ же дуги съ α и β, надо въ нихъ *различать и направленіе; а оно* зависитъ отъ положенія точекъ B и C относительно точки A. Разсмотримъ эту зависимость.

Здѣсь возможны два случая: первый представленъ на черт. 37, а второй на черт. 38 **). Въ обоихъ случаяхъ внутреннія дуги угловъ C и A имѣютъ общія крайнія точки съ дугами 2α и 2β; а потому *можно будетъ примѣнить § 10, если мы въ упомянутыхъ внутреннихъ дугахъ крайнія точки будемъ различать такъ же*, какъ въ 2α

---

*) Эта формула имѣетъ уже требуемый составъ, но она доказана пока только для угловъ треугольника.

**) Эти случаи можно выразить такъ: идя изъ точки A по окружности въ опредѣленномъ направленіи, напр. въ положительномъ, мы встрѣтимъ или сначала точку B, а потомъ C (черт. 37), или же наоборотъ (черт. 38).

и 2β, т.-е. если одну дугу будемъ считать отъ A къ B, а другую отъ B къ C. Итакъ, разсмотримъ дуги ADB и BEC *): на черт. 37 онѣ обѣ положительны, а на черт. 38 обѣ отрицательны; въ послѣднемъ случаѣ для измѣренія вписанныхъ угловъ надо будетъ дуги взять съ обратнымъ знакомъ.

Послѣ этихъ замѣчаній обратимся къ тому переходу, который мы имѣли въ виду.

Примѣняя § 10, найдемъ для обоихъ указанныхъ выше случаевъ

$$\smile ADB = 2\alpha + 360^\circ . m \quad \text{и} \quad \smile BEC = 2\beta + 360^\circ . n^{**}).$$

Выражая углы C и A, получимъ, соотвѣтственно знакамъ дугъ:

$$1)\ C = \alpha + 180^\circ . m \quad \text{и} \quad A = \beta + 180^\circ . n, \quad \text{откуда}$$
$$C + A = \alpha + 180^\circ . \overline{m+n}$$

или

$$2)\ C = -(\alpha + 180^\circ . m) \quad \text{и} \quad A = -(\beta + 180^\circ . n), \quad \text{откуда}$$
$$C + A = -(\alpha + \beta + 180^\circ . \overline{m+n}).$$

Подставляя эти выраженія въ равенство (M) и поступая во второмъ случаѣ по § 37, будемъ имѣть:

$$1)\ \mathrm{sn}(\alpha + \beta + 180^\circ . \overline{m+n}) = \mathrm{sn}(\alpha + 180^\circ . m) . \mathrm{cs}(\beta + 180^\circ . n) + \mathrm{cs}(\alpha + 180^\circ . m) . \mathrm{sn}(\beta + 180^\circ . n) \qquad (P)$$

$$2)\ -\mathrm{sn}(\alpha + \beta + 180^\circ . \overline{m+n}) = [-\mathrm{sn}(\alpha + 180^\circ . m)] . \mathrm{cs}(\beta + 180^\circ n) + \mathrm{cs}(\alpha + 180^\circ . m) . [-\mathrm{sn}(\beta + 180^\circ . n)]. \qquad (Q)$$

Но равенство (Q) перемѣной знаковъ приводится къ тому же виду, какой имѣетъ равенство (P); а потому далѣе будемъ разсматривать только одно это равенство.

III Въ равенствѣ (P) приведемъ функціи къ аргументамъ $\alpha + \beta$, α и β. Такъ какъ при этомъ оказываетъ вліяніе четность или нечетность m и n***), то разсмотримъ всѣ различные случаи, какіе здѣсь возможны:

*) Порядокъ буквъ указываетъ направленіе дугъ.

**) Числа m и n найдутся въ зависимости отъ 2α и 2β: если напр. $2\alpha = 1200^\circ$ и $2\beta = -260^\circ$, то $m = -3$ и $n = 1$ ($\smile ADB = 120^\circ$ и $\smile BEC = 100^\circ$); если $2\alpha = 1310^\circ$ и $2\beta = 300^\circ$, то $m = -4$ и $n = -1$ ($\smile ADB = -130^\circ$ и $\smile BEC = -60^\circ$); и т. д.

***) Напомнимъ, что концы дугъ α и $\alpha + 180^\circ . m$ при m четномъ совпадаютъ, а при m нечетномъ діаметрально противоположны (см. также §§ 45 и 49).

1) m и n числа четныя; тогда $m+n$ также число четное [1]. Получимъ $\operatorname{sn}(\alpha+\beta)=\operatorname{sn}\alpha \cdot \operatorname{cs}\beta+\operatorname{cs}\alpha \cdot \operatorname{sn}\beta$ (1)

2) m и n числа нечетныя; $m+n$ будетъ тогда число четное. Получимъ

$$\operatorname{sn}(\alpha+\beta)=(-\operatorname{sn}\alpha)\cdot(-\operatorname{cs}\beta)+(-\operatorname{cs}\alpha)\cdot(-\operatorname{sn}\beta) \quad (2)$$

3) m четное, а n нечетное, или наоборотъ; $m+n$ тогда есть число нечетное. Получимъ

$$\text{a)}\ -\operatorname{sn}(\alpha+\beta)=\operatorname{sn}\alpha\cdot(-\operatorname{cs}\beta)+\operatorname{cs}\alpha\cdot(-\operatorname{sn}\beta) \quad (3,a)$$

или

$$\text{b)}\ -\operatorname{sn}(\alpha+\beta)=(-\operatorname{sn}\alpha)\cdot\operatorname{cs}\beta+(-\operatorname{cs}\alpha)\cdot\operatorname{sn}\beta. \quad (3,b)$$

Равенства (1), (2), (3,a) и (3,b) приводятъ къ одной и той же формулѣ

$$\operatorname{sn}(\alpha+\beta)=\operatorname{sn}\alpha\cdot\operatorname{cs}\beta+\operatorname{cs}\alpha\cdot\operatorname{sn}\beta. \quad (IX)$$

Общность ея такимъ образомъ доказана.

Замѣчаніе. Случаи, когда сливаются въ одну точку двѣ вершины треугольника или даже всѣ три, подводятся подъ найденную формулу какъ предѣльные.

65*. Синусъ разности двухъ угловъ. Примѣнимъ формулу IX къ угламъ α и $-\beta$; получимъ

$$\operatorname{sn}[\alpha+(-\beta)]=\operatorname{sn}\alpha\cdot\operatorname{cs}(-\beta)+\operatorname{cs}\alpha\cdot\operatorname{sn}(-\beta),\quad \text{откуда}$$

$$\operatorname{sn}(\alpha-\beta)=\operatorname{sn}\alpha\cdot\operatorname{cs}\beta-\operatorname{cs}\alpha\cdot\operatorname{sn}\beta. \quad (X)$$

66*. Косинусъ суммы и разности двухъ угловъ. 1) Съ помощью формулъ приведенія и формулы X найдемъ

$$\operatorname{cs}(\alpha+\beta)=\operatorname{sn}[90^\circ-(\alpha+\beta)]=\operatorname{sn}[(90^\circ-\alpha)-\beta]$$

$$=\operatorname{sn}(90^\circ-\alpha)\cdot\operatorname{cs}\beta-\operatorname{cs}(90^\circ-\alpha)\cdot\operatorname{sn}\beta=\operatorname{cs}\alpha\cdot\operatorname{cs}\beta-\operatorname{sn}\alpha\cdot\operatorname{sn}\beta.$$

Итакъ

$$\operatorname{cs}(\alpha+\beta)=\operatorname{cs}\alpha\ \operatorname{cs}\beta-\operatorname{sn}\alpha\cdot\operatorname{sn}\beta. \quad (XI)$$

2) Въ полученной формулѣ замѣнимъ β черезъ $-\beta$:

$$\operatorname{cs}[\alpha+(-\beta)]=\operatorname{cs}\alpha\cdot\operatorname{cs}(-\beta)-\operatorname{sn}\alpha\cdot\operatorname{sn}(-\beta);$$

отсюда

$$\operatorname{cs}(\alpha-\beta)=\operatorname{cs}\alpha\cdot\operatorname{cs}\beta+\operatorname{sn}\alpha\cdot\operatorname{sn}\beta. \quad (XII)$$

67. Тангенсъ суммы и разности двухъ угловъ. 1) Имѣемъ

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{sn}(\alpha+\beta)}{\operatorname{cs}(\alpha+\beta)}=\frac{\operatorname{sn}\alpha\cdot\operatorname{cs}\beta+\operatorname{cs}\alpha\cdot\operatorname{sn}\beta}{\operatorname{cs}\alpha\cdot\operatorname{cs}\beta-\operatorname{sn}\alpha\cdot\operatorname{sn}\beta}.$$

---

[1] Абсолютная величина $m+n$ составляется изъ абсолютныхъ величинъ m и n или черезъ сложеніе, или черезъ вычитаніе.

Чтобы ввести $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$, раздѣлимъ числителя и знаменателя второй дроби на $\operatorname{cs}\alpha\,.\,\operatorname{cs}\beta$; получимъ

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\frac{\operatorname{sn}\alpha}{\operatorname{cs}\alpha}+\frac{\operatorname{sn}\beta}{\operatorname{cs}\beta}}{1-\frac{\operatorname{sn}\alpha}{\operatorname{cs}\alpha}\cdot\frac{\operatorname{sn}\beta}{\operatorname{cs}\beta}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\,.\operatorname{tg}\beta}. \qquad \text{(XIII)}$$

2) Повторяя тотъ же пріемъ, получимъ

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\,.\,\operatorname{tg}\beta}. \qquad \text{(XIV)}$$

Замѣчаніе. Такъ какъ формула XIII выведена изъ *общихъ* формулъ, то сама обладаетъ общностью, а потому формулу XIV можно получить также изъ формулы XIII, замѣняя β черезъ $-\beta$.

68. Отъ сложенія и вычитанія двухъ угловъ можно послѣдовательно перейти къ сочетанію какого угодно числа слагаемыхъ и вычитаемыхъ угловъ; напримѣръ
$\operatorname{sn}(\alpha-\beta+\gamma)=\operatorname{sn}[(\alpha-\beta)+\gamma]=\operatorname{sn}(\alpha-\beta)\,.\operatorname{cs}\gamma+\operatorname{cs}(\alpha-\beta)\,.\operatorname{sn}\gamma$; далѣе примѣняемъ формулы X и XII.

69. Синусъ, косинусъ и тангенсъ двойного угла. Въ формулахъ для суммы двухъ угловъ полагаемъ $\beta=\alpha$; получимъ

$$\operatorname{sn}2\alpha=2\operatorname{sn}\alpha\,.\operatorname{cs}\alpha \qquad \text{(XV)}$$

$$\operatorname{cs}2\alpha=\operatorname{cs}^2\alpha-\operatorname{sn}^2\alpha \qquad \text{(XVI)}$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} \qquad \text{(XVII)}$$

70. Чтобы разложить тригонометрическія функціи угловъ 3α и 4α, представимъ 3α въ видѣ $(2\alpha+\alpha)$, а 4α въ видѣ $(2\,.\,2\alpha)$; напримѣръ:

1) $\operatorname{sn}3\alpha=\operatorname{sn}(2\alpha+\alpha)=\operatorname{sn}2\alpha\,.\operatorname{cs}\alpha+\operatorname{cs}2\alpha\,.\operatorname{sn}\alpha$
$=(2\operatorname{sn}\alpha\,.\operatorname{cs}\alpha)\,.\operatorname{cs}\alpha+(\operatorname{cs}^2\alpha-\operatorname{sn}^2\alpha)\,.\operatorname{sn}\alpha=3\operatorname{sn}\alpha\,.\operatorname{cs}^2\alpha-\operatorname{sn}^3\alpha.$

Если требуется $\operatorname{sn}3\alpha$ выразить только черезъ $\operatorname{sn}\alpha$, то замѣнимъ въ послѣдней формулѣ $\operatorname{cs}^2\alpha$ посредствомъ $1-\operatorname{sn}^2\alpha$; получимъ

$$\operatorname{sn}3\alpha=3\operatorname{sn}\alpha-4\operatorname{sn}^3\alpha.$$

2) $\operatorname{sn}4\alpha=\operatorname{sn}(2\,.\,2\alpha)=2\operatorname{sn}2\alpha\,.\operatorname{cs}2\alpha$
$=2\,.\,(2\operatorname{sn}\alpha\,.\operatorname{cs}\alpha)\,.\,(\operatorname{cs}^2\alpha-\operatorname{sn}^2\alpha)=4\operatorname{sn}\alpha\,.\operatorname{cs}^3\alpha-4\operatorname{cs}\alpha\,.\operatorname{sn}^3\alpha.$

71*. Нерѣдко бываетъ надобно функціи даннаго угла выразить посредствомъ функцій его половны: для этого цѣлое разсматриваемъ какъ удвоенную половину и примѣняемъ § 69. Напримѣръ:

a) $\operatorname{sn}\alpha=\operatorname{sn}\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right)=2\operatorname{sn}\frac{\alpha}{2}\operatorname{cs}\frac{\alpha}{2}.$

b) $\operatorname{cs}\alpha=\operatorname{cs}\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right)=\operatorname{cs}^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{sn}^2\frac{\alpha}{2}.$

72*. Синусъ, косинусъ и тангенсъ половины угла По § 32 и по § 71 b) имѣемъ

$$\left| \begin{array}{l} cs^2\frac{\alpha}{2}+sn^2\frac{\alpha}{2}=1 \\ cs^2\frac{\alpha}{2}-sn^2\frac{\alpha}{2}=cs\,\alpha \end{array} \right|$$

Изъ этой системы получимъ

$$sn^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-cs\,\alpha}{2}\dots(a) \quad \text{и} \quad cs^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+cs\,\alpha}{2}\dots(b),$$

а отсюда
$$tg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-cs\,\alpha}{1+cs\,\alpha}\dots(c).$$

Далѣе извлекаемъ корень, при чемъ 1) если знакъ $sn\frac{\alpha}{2}$, $cs\frac{\alpha}{2}$ и $tg\frac{\alpha}{2}$ *можно* узнать заранѣе, то беремъ только требуемое значеніе корня*), 2) если же этого нѣтъ, то *одинаково* возможны оба знака передъ корнемъ[1]).

Итакъ вообще

$$sn\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-cs\,\alpha}{2}} \quad (XVIII) \qquad cs\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+cs\,\alpha}{2}} \quad (XIX)$$

$$tg\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-cs\,\alpha}{1+cs\,\alpha}}\,^{**)} \quad (XX)$$

---

*) Пусть напримѣръ дано $cs\,\alpha=0{,}3$ и кромѣ того извѣстно, что $650^\circ<\alpha<700^\circ$. Тогда имѣемъ: $325^\circ<\frac{\alpha}{2}<350^\circ$, слѣдовательно $sn\frac{\alpha}{2}$ отрицателенъ, $cs\frac{\alpha}{2}$ положителенъ и $tg\frac{\alpha}{2}$ отрицателенъ; такимъ образомъ въ настоящемъ случаѣ:

$$sn\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1}{2}(1-0{,}3)}=-\sqrt{0{,}35}; \quad cs\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}(1+0{,}3)}=\sqrt{0{,}65};$$

$$tg\,\alpha=-\sqrt{\frac{7}{13}}.$$

[1]) Доказательство см. въ «Прибавленіяхъ».

**) Въ этихъ формулахъ черезъ $\sqrt{\dots}$ обозначено положительное значеніе корня.

Значенія α при $+\sqrt{\dots}$ и при $-\sqrt{\dots}$, конечно, не одинаковы [ср. § 36 прим. 1 b].

Примѣръ. *Найти* $tg\,22°30'$ Имѣемъ послѣдовательно

$$tg\,22°30' = \sqrt{\frac{1-cs\,45°}{1+cs\,45°}} = \sqrt{\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right):\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}} = \sqrt{2}-1.$$

73*. Если кромѣ $cs\,\alpha$ данъ еще $sn\,\alpha$, для опредѣленія $tg\frac{\alpha}{2}$ удобнѣе иныя формулы: онѣ получатся, если мы, замѣнивъ $tg\frac{\alpha}{2}$ черезъ $sn\frac{\alpha}{2}\Big/cs\frac{\alpha}{2}$, дополнимъ сначала числителя, а потомъ знаменателя до $2\,sn\frac{\alpha}{2}cs\frac{\alpha}{2}$ и примѣнимъ формулу (a) изъ § 71 и формулы (b) и (a) изъ § 72. Итакъ:

$$a)\qquad tg\frac{\alpha}{2} = \frac{sn\frac{\alpha}{2}}{cs\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\,sn\frac{\alpha}{2}cs\frac{\alpha}{2}}{2\,cs^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{sn\,\alpha}{1+cs\,\alpha}$$

$$b)\qquad tg\frac{\alpha}{2} = \frac{sn\frac{\alpha}{2}}{cs\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\,sn^2\frac{\alpha}{2}}{2\,sn\frac{\alpha}{2}\,cs\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-cs\,\alpha}{sn\,\alpha}.$$

74. Задачи о выраженіи функцій для $\frac{\alpha}{3}$, $\frac{\alpha}{4}$ и т. д. съ помощью функцій α приводятъ къ уравненіямъ *высшихъ* степеней.

Пусть напримѣръ требуется $sn\frac{\alpha}{3}$ связать уравненіемъ съ $sn\,\alpha$. Замѣнимъ α черезъ $\left(3\cdot\frac{\alpha}{3}\right)$ и воспользуемся § 70 п. 1; получимъ $sn\,\alpha = sn\left(3\cdot\frac{\alpha}{3}\right) = 3\,sn\frac{\alpha}{3} - 4\,sn^3\frac{\alpha}{3}$. Означая $sn\frac{\alpha}{3}$ черезъ x, будемъ имѣть

$$x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}sn\,\alpha = 0.$$

VI. Приведенiе выраженiй къ виду удобному для логариѳмированiя.

75. Общее замѣчанiе. Чтобы выраженiе удобно было вычислить съ помощью логариѳмовъ, оно не должно *содержать ни суммъ, ни разностей*, кромѣ такихъ, которыя легко найти *непосредственно.*

Если это условiе *не выполнено*, то слѣдуетъ данное выраженiе преобразовать, — *насколько* это возможно и выгодно. Главныя изъ такихъ преобразованiй мы и *разсмотримъ теперь.*

76. Примѣры. *Начнемъ съ нѣсколькихъ простѣйшихъ* случаевъ.

1) $1-\mathrm{sn}^2 25°=\mathrm{cs}^2 25°$ 2) $1+\mathrm{tg}^2 70°=\mathrm{sc}^2 70°=1:\mathrm{cs}^2 70°$

3) $\mathrm{sn}^2 50°-\mathrm{cs}^2 50°=-(\mathrm{cs}^2 50°-\mathrm{sn}^2 50°)=-\mathrm{cs}\,100°=\mathrm{sn}\,10°$

4) $3\ \mathrm{ctg}\,20°\ (1-\mathrm{tg}^2 20°)=6:\dfrac{2\,\mathrm{tg}\,20°}{1-\mathrm{tg}^2 20°}=6:\mathrm{tg}\,40°$

5) $1+\mathrm{cs}\,\alpha\overset{*)}{=}2\,\mathrm{cs}^2\dfrac{\alpha}{2}$ (XXI) 6) $1-\mathrm{cs}\,\alpha=2\,\mathrm{sn}^2\dfrac{\alpha}{2}$ (XXII)

7) $1+\mathrm{sn}\,40°=1+\mathrm{cs}\,50°=2\,\mathrm{cs}^2 25°$

8) $\dfrac{1-\mathrm{sn}\,\alpha}{\mathrm{cs}\,\alpha}=\dfrac{1-\mathrm{cs}\,(90°-\alpha)}{\mathrm{sn}\,(90°-\alpha)}\overset{**)}{=}\mathrm{tg}\left(45°-\dfrac{\alpha}{2}\right).$

Замѣчанiе. Выраженiя: 1), 2), 5), 6) и 7) легко вычисляются и въ первоначальномъ видѣ [1]), но сдѣланныя преобразованiя могутъ быть полезны, если эти выраженiя сами входятъ въ составъ другихъ (какъ въ примѣрѣ 8).

---

*) См. § 72.

**) См. § 73 b) въ обратномъ переходѣ.

[1]) Возьмемъ напримѣръ $x=1+\mathrm{tg}^2 70°$. Полагая $\mathrm{tg}^2 70°=y$, найдемъ:

$\lg y=2\lg\mathrm{tg}\,70°=0{,}87786;\ y=7{,}5485.$

Такимъ образомъ $x=1+y=8{,}5485.$

77. Преобразованіе суммы и разности двухъ синусовъ или косинусовъ. а) Преобразуемъ $\operatorname{sn}\alpha+\operatorname{sn}\beta$. Для этого положимъ

$$\alpha=x+y \quad \text{и} \quad \beta=x-y$$

и примѣнимъ формулы IX и X (§§ 64 и 65); будемъ имѣть:

$$\operatorname{sn}\alpha+\operatorname{sn}\beta=\operatorname{sn}(x+y)+\operatorname{sn}(x-y)=2\operatorname{sn}x\ \operatorname{cs}y;$$

но $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$ и $y=\frac{\alpha-\beta}{2}$; таким образомъ

$$\operatorname{sn}\alpha+\operatorname{sn}\beta=2\operatorname{sn}\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\operatorname{cs}\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \text{(XXIII)}$$

Прилагая тотъ же пріемъ, получимъ:

b) $$\operatorname{sn}\alpha-\operatorname{sn}\beta=2\operatorname{sn}\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\operatorname{cs}\frac{\alpha+\beta}{2} \qquad \text{(XXIV)}$$

c) $$\operatorname{cs}\alpha+\operatorname{cs}\beta=2\operatorname{cs}\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\operatorname{cs}\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \text{(XXV)}$$

d) $$\operatorname{cs}\alpha-\operatorname{cs}\beta=-2\operatorname{sn}\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\operatorname{sn}\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$=2\operatorname{sn}\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\operatorname{sn}\frac{\beta-\alpha}{2}\text{*)} \qquad \text{(XXVI)}$$

Примѣры. 1) $\operatorname{sn}100^\circ-\operatorname{sn}16^\circ=2\operatorname{sn}\frac{100^\circ-16^\circ}{2}\cdot\operatorname{cs}\frac{100^\circ+16^\circ}{2}$
$=2\operatorname{sn}42^\circ\,.\,\operatorname{cs}58^\circ$

2) $\operatorname{cs}12^\circ-\operatorname{cs}60^\circ=2\operatorname{sn}36^\circ\,.\,\operatorname{sn}24^\circ$

3) $\operatorname{cs}50^\circ+\operatorname{sn}70^\circ=\operatorname{sn}40^\circ+\operatorname{sn}70^\circ=2\operatorname{sn}55^\circ\,.\,\operatorname{cs}15^\circ$

4) $\operatorname{sn}\alpha+\operatorname{cs}\alpha=\operatorname{sn}\alpha+\operatorname{sn}(90^\circ-\alpha)=2\operatorname{sn}45^\circ\,.\,\operatorname{cs}(45^\circ-\alpha)=$
$=\sqrt{2}\,.\,\operatorname{cs}(45^\circ-\alpha)$

78. Преобразованіе суммы и разности двухъ тангенсовъ или котангенсовъ. Чтобы преобразовать выраженія:

$$\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta,\quad \operatorname{ctg}\alpha\pm\operatorname{ctg}\beta,\quad \operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{ctg}\beta \quad \text{и} \quad \operatorname{ctg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta,$$

сначала переходимъ на синусъ и косинусъ; напримѣръ:

a) $$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\operatorname{sn}\alpha}{\operatorname{cs}\alpha}+\frac{\operatorname{sn}\beta}{\operatorname{cs}\beta}=\frac{\operatorname{sn}(\alpha+\beta)}{\operatorname{cs}\alpha\,.\,\operatorname{cs}\beta}$$

---

*) По § 37 $\operatorname{sn}\frac{\alpha-\beta}{2}=-\operatorname{sn}\frac{\beta-\alpha}{2}$. *Формула* XXVI *читается* такъ: разность двухъ косинусовъ равна удвоенному произведенію синуса полусуммы угловъ на синусъ *обратной* полуразности ихъ.

b) $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=\frac{\operatorname{cs}\alpha}{\operatorname{sn}\alpha}-\frac{\operatorname{cs}\beta}{\operatorname{sn}\beta}=\frac{\operatorname{sn}(\beta-\alpha)}{\operatorname{sn}\alpha\,.\,\operatorname{sn}\beta}$

c) $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=\frac{\operatorname{sn}\alpha}{\operatorname{cs}\alpha}-\frac{\operatorname{cs}\beta}{\operatorname{sn}\beta}=-\frac{\operatorname{cs}(\alpha+\beta)}{\operatorname{cs}\alpha\,.\,\operatorname{sn}\beta}.$

79. Нѣкоторыя болѣе сложныя выраженія. Преобразуемъ $\frac{\operatorname{sn}\alpha+\operatorname{sn}\beta}{\operatorname{sn}\alpha-\operatorname{sn}\beta}$ и $\operatorname{sn}^2\alpha-\operatorname{sn}^2\beta$.

a) $\frac{\operatorname{sn}\alpha+\operatorname{sn}\beta}{\operatorname{sn}\alpha-\operatorname{sn}\beta}\overset{1)}{=}\frac{2\operatorname{sn}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{cs}\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\operatorname{sn}\frac{\alpha-\beta}{2}\operatorname{cs}\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{\operatorname{sn}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{cs}\frac{\alpha+\beta}{2}}:\frac{\operatorname{sn}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{cs}\frac{\alpha-\beta}{2}}$

Отсюда $$\frac{\operatorname{sn}\alpha+\operatorname{sn}\beta}{\operatorname{sn}\alpha-\operatorname{sn}\beta}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}} \qquad \text{(XXVII)}$$

b) $\operatorname{sn}^2\alpha-\operatorname{sn}^2\beta=(\operatorname{sn}\alpha+\operatorname{sn}\beta)(\operatorname{sn}\alpha-\operatorname{sn}\beta)=\left(2\operatorname{sn}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{cs}\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\times$
$\left(2\operatorname{sn}\frac{\alpha-\beta}{2}\operatorname{cs}\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\overset{2)}{=}\left(2\operatorname{sn}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{cs}\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\left(2\operatorname{sn}\frac{\alpha-\beta}{2}\operatorname{cs}\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$

Примѣняя теперь § 69, получимъ
$$\operatorname{sn}^2\alpha-\operatorname{sn}^2\beta=\operatorname{sn}(\alpha+\beta)\,.\,\operatorname{sn}(\alpha-\beta) \qquad \text{(XXVIII)}$$

80. Преобразуемъ $\operatorname{sn}\alpha+\operatorname{sn}\beta+\operatorname{sn}\gamma$, если $\alpha+\beta+\gamma=180°$ *).

Имѣемъ послѣдовательно:
$$\operatorname{sn}\alpha+\operatorname{sn}\beta+\operatorname{sn}\gamma\overset{**)}{=}\operatorname{sn}\alpha+\operatorname{sn}\beta+\operatorname{sn}(\alpha+\beta)=2\operatorname{sn}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{cs}\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$+2\operatorname{sn}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{cs}\frac{\alpha+\beta}{2}=2\operatorname{sn}\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\operatorname{cs}\frac{\alpha+\beta}{2}+\operatorname{cs}\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$=2\operatorname{sn}\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot 2\operatorname{cs}\frac{\alpha}{2}\operatorname{cs}\frac{\beta}{2}\overset{***)}{=}2\operatorname{cs}\frac{\gamma}{2}\cdot 2\operatorname{cs}\frac{\alpha}{2}\operatorname{cs}\frac{\beta}{2}.$$

---

1) По § 77.

2) Группируя множители иначе.

*) Таковы напримѣръ углы треугольника; таковы же углы: $\alpha=400°$, $\beta=-320°$ и $\gamma=100°$, и т. д.

**) $\gamma=180°-(\alpha+\beta)$, слѣдовательно $\operatorname{sn}\gamma=\operatorname{sn}(\alpha+\beta)$.

***) $\alpha+\beta=180°-\gamma$, $\frac{\alpha+\beta}{2}=90°-\frac{\gamma}{2}$; слѣдовательно $\operatorname{sn}\frac{\alpha+\beta}{2}=\operatorname{cs}\frac{\gamma}{2}$.

Итакъ, если $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, то

$$\operatorname{sn}\alpha+\operatorname{sn}\beta+\operatorname{sn}\gamma=4\operatorname{cs}\frac{\alpha}{2}\operatorname{cs}\frac{\beta}{2}\operatorname{cs}\frac{\gamma}{2}. \qquad \text{(XXIX)}$$

Замѣчаніе. Обращаемъ вниманіе на существенное отличіе этой формулы отъ выведенныхъ ранѣе: тѣ обладаютъ общностью, тогда какъ формула XXIX содержитъ только частный случай.

81. Введеніе вспомогательнаго угла. Приводя выраженіе къ логариѳмическому виду, иногда бываетъ выгодно нѣкоторыя числа замѣнить тригонометрическими функціями угловъ. Вотъ нѣсколько такихъ случаевъ.

1) $\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{5}-1}=\frac{1}{2}\sqrt{4\operatorname{sn}18^\circ}=\sqrt{\operatorname{sn}18^\circ}$

2) $\sqrt{\sqrt{2}-1}=\sqrt{\operatorname{tg}22^\circ30'}$

3) $1+\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}45^\circ+\operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{sn}(45^\circ+\alpha)}{\operatorname{cs}45^\circ.\operatorname{cs}\alpha}$

4) $1+\operatorname{sn}\alpha+\operatorname{cs}\alpha=\operatorname{sn}90^\circ+\operatorname{sn}\alpha+\operatorname{sn}(90^\circ-\alpha)$; такъ какъ во второй части сумма угловъ равна 180°, то примѣнимъ формулу XXIX; тогда:

$$1+\operatorname{sn}\alpha+\operatorname{cs}\alpha=4\operatorname{cs}45^\circ\operatorname{cs}\frac{\alpha}{2}\operatorname{cs}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right).$$

5) Чтобы преобразовать $\operatorname{sn}\alpha+\operatorname{cs}\alpha$, умножаемъ и дѣлимъ это выраженіе на $\sqrt{2}$ и пользуемся тѣмъ, что $\frac{1}{\sqrt{2}}=\operatorname{sn}45^\circ=\operatorname{cs}45^\circ$; получимъ

$$\operatorname{sn}\alpha+\operatorname{cs}\alpha=\sqrt{2}\,(\operatorname{sn}\alpha.\operatorname{cs}45^\circ+\operatorname{cs}\alpha.\operatorname{sn}45^\circ)=\sqrt{2}.\operatorname{sn}(\alpha+45^\circ).$$

6) $1+2\operatorname{sn}50^\circ=2\left(\frac{1}{2}+\operatorname{sn}50^\circ\right)=2\,(\operatorname{sn}30^\circ+\operatorname{sn}50^\circ)$
$=4\operatorname{sn}40^\circ.\operatorname{cs}10^\circ.$

7) $\operatorname{sn}^2\alpha-3\operatorname{cs}^2\alpha=\operatorname{cs}^2\alpha(\operatorname{tg}^2\alpha-3)=\operatorname{cs}^2\alpha\,(\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2 60^\circ)=$
$=\operatorname{cs}^2\alpha\cdot\frac{\operatorname{sn}(\alpha+60^\circ).\operatorname{sn}(\alpha-60^\circ)}{\operatorname{cs}^2\alpha.\operatorname{cs}^2 60^\circ}=4\operatorname{sn}(\alpha+60^\circ)\operatorname{sn}(\alpha-60^\circ).$

82. Пусть будутъ A и B два выраженія порознь удобныя для логариѳмовъ; допустимъ еще, что они имѣютъ положительное значеніе. Требуется преобразовать $A+B$ и $A-B$.

Здѣсь иногда бываетъ выгодно ввести вспомогательный уголъ; разсмотримъ этотъ способъ.

I. Случай $A+B$. Имѣемъ $A+B=A\left(1+\frac{B}{A}\right)$; полагаемъ теперь $\frac{B}{A}=\operatorname{tg}^2\varphi$ *); это возможно, такъ какъ $\frac{B}{A}$ положительно, а по абсолютной величинѣ для тангенса не требуется ограниченіе.

Тогда $A+B=B\,(1+\operatorname{tg}^2\varphi)=A\,.\,\operatorname{sc}^2\varphi=\frac{A}{\operatorname{cs}^2\varphi}$.

II. 1) Случай $A-B$ при условіи $A>B$. Имѣемъ $A-B=A\left(1-\frac{B}{A}\right)$; такъ какъ $\frac{B}{A}$ положительно и менѣе единицы, то можно принять $\frac{B}{A}=\operatorname{sn}^2\varphi$, послѣ чего получимъ

$$A-B=A\,(1-\operatorname{sn}^2\varphi)=A\,.\,\operatorname{cs}^2\varphi.$$

2. Случай $A-B$ при условіи $A<B$. Имѣемъ $A-B=-(B-A)$; такъ какъ $B>A$, то преобразованіе сводится къ предыдущему.

Примѣръ. Вычислить $x=\sqrt{\operatorname{tg}^2 50^\circ-\operatorname{sn}^2 20^\circ}$.

a) По только что изложенному находимъ $x=\sqrt{\operatorname{tg}^2 50^\circ\,.\,\operatorname{cs}^2\varphi}=\operatorname{tg} 50^\circ\,.\,\operatorname{cs}\varphi$, при чемъ φ опредѣляется изъ условія $\operatorname{sn}^2\varphi=\frac{\operatorname{sn}^2 20^\circ}{\operatorname{tg}^2 50^\circ}$ или $\operatorname{sn}\varphi=\frac{\operatorname{sn} 20^\circ}{\operatorname{tg} 50^\circ}$.

b) Произведемъ логариѳмическое вычисленіе.

$$\lg\operatorname{sn}\varphi=\lg\operatorname{sn}20^\circ-\lg\operatorname{tg}50^\circ$$

$$\begin{array}{rl} & \lg\operatorname{sn}20^\circ=9{,}53405-10 \\ - & \lg\operatorname{tg}50^\circ=0{,}07619 \\ \hline & \lg\operatorname{sn}\varphi=9{,}45786-10 \\ & \varphi=16^\circ 40' 39'' \end{array}$$

$$\lg x=\lg\operatorname{tg}50^\circ+\lg\operatorname{cs}\varphi$$

$$\begin{array}{rl} & \lg\operatorname{tg}50^\circ=0{,}07619 \\ + & \lg\operatorname{cs}\varphi=9{,}98133-10 \\ \hline & \lg x=0{,}05752 \\ & x=1{,}14161. \end{array}$$

83. Приведемъ къ логариѳмическому виду корни уравненія

$$x^2-ax+b=0,$$

предполагая, что a и b положительны и корни уравненія дѣйствительны. Рѣшивъ данное уравненіе, получимъ

$$x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}.$$

---

*) φ означаетъ здѣсь *табличный* уголъ.

Преобразуемъ подкоренную разность: $\frac{a^2}{4}-b=\frac{a^2}{4}\left(1-\frac{4b}{a^2}\right)$; такъ какъ b положительно и корни уравненія дѣйствительны, то $0<\frac{4b}{a^2}<1$; поэтому можно принять $\frac{4b}{a^2}=\text{sn}^2\,\varphi$, послѣ чего будемъ имѣть $\frac{a^2}{4}-b=\frac{a^2}{4}\cdot\text{cs}^2\,\varphi$.

Такимъ образомъ приходимъ къ выраженію

$$x=\frac{a}{2}\pm\frac{a}{2}\cdot\text{cs}\,\varphi\text{*)}$$

отсюда, вынося $\frac{a}{2}$ за скобки и примѣняя § 76, найдемъ:

$$x_1=\frac{a}{2}(1+\text{cs}\,\varphi)=a\,.\,\text{cs}^2\,\frac{\varphi}{2}$$

$$x_2=\frac{a}{2}(1-\text{cs}\,\varphi)=a\,.\,\text{sn}^2\,\frac{\varphi}{2}.$$

---

*) Знакъ $\sqrt{\ldots}$ въ преобразуемой формулѣ имѣетъ смыслъ абсолютной величины, поэтому, если a положительно и φ уголъ табличный, то $\sqrt{\frac{a^2}{4}\cdot\text{cs}^2\varphi}=\frac{a}{2}\cdot\text{cs}\,\varphi$.

VII. Понятіе о составленіи тригонометрическихъ таблицъ.

84. Покажемъ, что для всякаго угла можно вычислить тригонометрическія функціи — съ желаемой степенью точности.

Тригонометрическія функціи всякаго угла приводятся къ функціямъ положительнаго угла не превышающаго 45°; всѣ тригонометрическія функціи можно вычислить по одной изъ нихъ, напр. по синусу; изъ этого слѣдуетъ, что для нашей цѣли достаточно указать способъ, какимъ можно было бы вычислить синусъ каждаго изъ угловъ, содержащихся между 0 и 45°.

Одинъ изъ способовъ основанъ на томъ, что при *очень маломъ* углѣ можно безъ значительной погрѣшности [1]) *перпендикуляръ* замѣнить *дугой* и такимъ образомъ воспользоваться *готовымъ* значеніемъ π*); по этому способу мы начнемъ вычисленіе съ *достаточно малой доли* даннаго угла и будемъ уголъ увеличивать постепенно, примѣняя формулы, выведенныя для двойного угла и суммы угловъ.

---

[1]) Доказательство этого будетъ приведено ниже.

*) Пусть напримѣръ на чертежѣ 39 уголъ $a = 10'$. По опредѣленію синуса имѣемъ $\sin a = \frac{BC}{R}$; указанный же способъ состоитъ въ томъ, что вмѣсто $\frac{BC}{R}$ мы беремъ $\frac{\smile AB}{R}$. Для вычисленія этого отношенія имѣемъ:

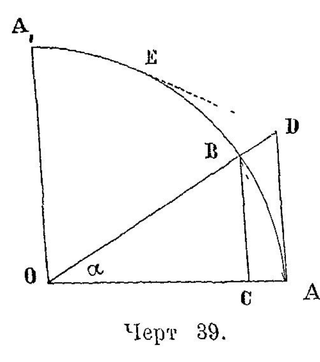
$$\smile AB = \frac{2\pi R.10}{360.60} = \frac{\pi R}{1080}, \text{ откуда } \frac{\smile AB}{R} = \frac{\pi}{1080};$$

пользуясь значеніемъ π (см. примѣч. къ § 7), получимъ

$$\frac{\smile AB}{R} = 0{,}002\,908\,882\ldots$$

85. Для сужденія о погрѣшности *начальнаго* вычисленія можетъ служить слѣдующая теорема.

Теорема. *Если уголъ заключается между 0 и 90°, то отношеніе дуги къ радіусу превышаетъ синусъ менѣе, чѣмъ на четверть своего куба.*



Черт 39.

Доказательство. I. Покажемъ сперва, что при положительномъ остромъ углѣ отношеніе дуги къ радіусу болѣе синуса и менѣе тангенса.

Сравнимъ дугу AB съ перпендикуляромъ BC и касательной AD (черт. 39). Проведя для этого хорду AB и касательную DE, найдемъ: 1) перпендикуляръ BC менѣе дуги AB, такъ какъ онъ менѣе ея хорды, и 2) дуга AB менѣе касательной AD, потому что дуга AE менѣе объемлющей ломаной ADE. Такимъ образомъ

$$BC < \smile AB < AD.$$

Раздѣливъ эти линіи на R и означая отношеніе дуги къ радіусу черезъ a, будемъ имѣть

$$\operatorname{sn}\alpha < a < \operatorname{tg}\alpha \text{ *)}.$$

II. Доказано, что $a > \operatorname{sn}\alpha$. Чтобы изслѣдовать $a - \operatorname{sn}\alpha$, сдѣлаемъ спачала слѣдующее преобразованіе:

$$\operatorname{sn}\alpha = 2\operatorname{sn}\frac{\alpha}{2}\operatorname{cs}\frac{\alpha}{2} = 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{cs}^2\frac{\alpha}{2} = 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(1-\operatorname{sn}^2\frac{\alpha}{2}\right).$$

Теперь въ послѣднемъ выраженіи замѣнимъ

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \quad \text{и} \quad \operatorname{sn}\frac{\alpha}{2} \quad \text{черезъ} \quad \frac{a}{2};$$

такъ какъ по доказанному раньше

$$\frac{a}{2} < \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \quad \text{и} \quad \frac{a}{2} > \operatorname{sn}\frac{\alpha}{2},$$

*) При линейномъ измѣреніи угла это неравенство приметъ видъ: $\operatorname{sn} a < a < \operatorname{tg} a$.

то выраженіе уменьшится[1]), и мы получимъ *неравенство*

$$\operatorname{sn}\alpha > 2\cdot\frac{a}{2}\cdot\left(1-\frac{a^2}{4}\right),$$

а отсюда
$$a-\operatorname{sn}\alpha<\frac{a^3}{4}.$$

Примѣръ. Пусть $\alpha=10'$; тогда $a=0{,}002\,908\,882\ldots$ (см. примѣч. къ § 84); чтобы упростить изслѣдованіе, замѣтимъ, что въ настоящемъ случаѣ $a<0{,}003$; пользуясь этимъ неравенствомъ, получимъ изъ доказаннаго выше

$0{,}002\,908\,882\ldots-\operatorname{sn}10'<0{,}25\,.(0{,}003)^3$ или

$0{,}002\,908\,882\ldots-\operatorname{sn}10'<0{,}000\,000\,006\,75;$

отсюда $0{,}002\,908\,882\ldots-\operatorname{sn}10'<0{,}000\,000\,01;$ слѣдов. $\operatorname{sn}10'=0{,}0029088\ldots$ съ 7 вѣрными десятичными знаками.

86. Въ § 84 мы предполагали для косинуса исходнаго угла вычисленіе по формулѣ $\operatorname{cs}\alpha=\sqrt{1-\operatorname{sn}^2\alpha}$; но *практически* проще иной способъ. Приводимъ его.

Исходимъ изъ того, что $\operatorname{cs}\alpha$ выражается *раціонально* черезъ $\operatorname{sn}\frac{\alpha}{2}$, а именно
$$\operatorname{cs}\alpha=1-2\operatorname{sn}^2\frac{\alpha}{2} \qquad (\S\ 72).$$

Для $\operatorname{sn}\frac{\alpha}{2}$ имѣемъ по предыдущему

$$\operatorname{sn}\frac{\alpha}{2}<\frac{a}{2} \quad \text{и} \quad \frac{a}{2}-\operatorname{sn}\frac{\alpha}{2}<\frac{1}{4}\left(\frac{a}{2}\right)^3;$$

отсюда
$$\frac{a}{2}>\operatorname{sn}\frac{\alpha}{2}>\frac{a}{2}-\frac{a^3}{32};$$

Теперь въ выраженіи $\operatorname{cs}\alpha$ подставимъ вмѣсто $\operatorname{sn}\frac{\alpha}{2}$ сначала $\frac{a}{2}$, а потомъ $\frac{a}{2}-\frac{a^3}{32}$; въ первомъ случаѣ выраженіе уменьшится,

---

[1]) Такъ какъ $\frac{\alpha}{2}<45^\circ$, то $\frac{a}{2}<\frac{\pi}{4}$, поэтому $1-\frac{a^2}{4}$ положительно.

Такимъ образомъ послѣ подстановки получились множители также *положительные;* а потому произведенія можно сравнить по величинѣ отдѣльныхъ множителей

а во второмъ увеличится; слѣдовательно получимъ

$$\cos \alpha > 1-2\left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad \text{и} \quad \cos \alpha < 1-2\left(\frac{a}{2}-\frac{a^3}{32}\right)^2$$

или

$$\cos \alpha > 1-\frac{a^2}{2} \quad \text{и} \quad \cos \alpha < 1-\frac{a^2}{2}+\frac{a^4}{16}-\frac{a^6}{512}.$$

Въ послѣднемъ неравенствѣ можно опустить $-\frac{a^6}{512}$, такъ какъ отъ этого вторая часть еще болѣе превыситъ первую.

Итакъ $$\left(1-\frac{a^2}{2}\right) < \cos \alpha < \left(1-\frac{a^2}{2}\right)+\frac{a^4}{16}.$$

Отсюда видно, что для $\cos \alpha$ можно принять величину $1-\frac{a^2}{2}$, — съ ошибкой менѣе, чѣмъ на $\frac{a^4}{16}$.

87. Примѣняя способы, указанные выше (съ нѣкоторыми упрощеніями), можно составить такъ называемыя *таблицы натуральныхъ тригонометрическихъ величинъ* [1]; а взявъ *логариѳмы* найденныхъ чиселъ, получимъ тѣ логариѳмическія таблицы, которыми *обыкновенно* пользуются въ тригонометрическихъ вычисленіяхъ.

Замѣчаніе. Въ предыдущемъ только доказана *возможность* составленія тригонометрическихъ таблицъ. Относительно того, какъ онѣ *были составлены въ дѣйствительности*, замѣтимъ лишь, что примѣненные способы были весьма сложны [2]).

Въ настоящее же время, — если бы понадобилось составить новыя таблицы,—всего удобнѣе пользоваться тѣми формулами, которыя даетъ высшая математика.

---

[1]) Слово «натуральныхъ» присоединяется, чтобы отличить эти таблицы отъ обыкновенныхъ, гдѣ тригонометрическія величины логариѳмированы.

[2]) Подробнѣе объ этомъ можно найти напр. въ «Очеркѣ исторіи плоской тригонометріи», приложенномъ къ учебнику тригонометріи Г. Тиме.

О РѢШЕНІИ ТРЕУГОЛЬНИКОВЪ.

(Тригонометрія.)

НѢКОТОРЫЯ ОБЩІЯ ЗАМѢЧАНІЯ О РѢШЕНІИ ТРЕУГОЛЬНИКОВЪ.

88. О тригонометрическомъ рѣшеніи треугольниковъ (о *вычисленіи треугольниковъ*) было уже сказано въ §§ 1 и 3. Теперь укажемъ подробнѣе, какія могутъ быть данныя при рѣшеніи треугольниковъ и какія требованія можно предъявлять къ самому рѣшенію.

Обыкновенный, — *практическій*[1]), — случай состоитъ въ томъ, что въ тр-кѣ извѣстны нѣкоторые стороны и углы и требуется вычислить остальные стороны и углы. Если же разсматривать вопросъ независимо отъ практическихъ приложеній, то данными будутъ служить не только стороны и углы, но и другія величины[2]), а также и различныя соотношенія между ними[3]).

Въ задачахъ на рѣшеніе треугольниковъ словами «рѣшить треугольникъ» выражаютъ обыкновенно требованіе опредѣлить неизвѣстные стороны и углы, а иногда и площадь; но къ отдѣлу о рѣшеніи треугольниковъ относятъ также и тѣ задачи, гдѣ опредѣляемые элементы иные, чѣмъ стороны и углы.

89. Отъ поставленнаго требованія зависитъ *число* данныхъ: для *полнаго* рѣшенія треугольника[4]) данныхъ должно быть *три* и они

---

[1]) Напримѣръ въ *геодезіи* (т.-е. при измѣреніяхъ на мѣстности).

[2]) Напримѣръ. высота тр-ка, периметръ, радіусъ описаннаго круга, площадь тр-ка, какой-либо объемъ, связанный съ тр-комъ, и т. д.

[3]) Напримѣръ условіе, что въ искомомъ тр-кѣ квадратъ стороны равенъ произведенію двухъ другихъ сторонъ, и т. п.

[4]) Т.-е. для возможности опредѣлить *каждый* элементъ тр-ка.

должны быть *независимы* между собой [1]); если же надо опредѣлить только нѣкоторые элементы, то данныхъ можетъ быть и менѣе трехъ [2]).

90. Что касается *формы* рѣшенія, то слѣдуетъ различать задачи числовыя и буквенныя:

1) Въ числовыхъ задачахъ каждый результатъ долженъ быть представленъ также числомъ; при этомъ отъ способа рѣшенія требуется, чтобы онъ былъ кратокъ и возможно точенъ [3]). Правильность вычисленія контролируютъ иногда особыми повѣрками: такъ, вычисляютъ одну и ту же величину по двумъ различнымъ формуламъ и т. п.

2) Въ буквенныхъ задачахъ можно требовать:

a) выразить искомыя величины *только черезъ данныя*, — хотя бы полученныя формулы и не были удобны для вычисленія;

b) составить формулы *удобныя для вычисленія*, — хотя бы эти формулы и не выражали искомыхъ величинъ съ помощью данныхъ, а представляли лишь *послѣдовательное* рѣшеніе [4]).

Удовлетворить обоимъ требованіямъ *вмѣстѣ* не всегда удается; въ такихъ случаяхъ будемъ указывать тотъ и другой способъ отдѣльно, или же только *второй* способъ. Наконецъ иногда будемъ ограничиваться только главными пунктами въ рѣшеніи.

---

[1]) Примѣромъ данныхъ зависимыхъ между собой могутъ служить три угла тр-ка: сумма ихъ должна составлять 180°, слѣдов. третій уголъ зависитъ отъ двухъ другихъ. Углы тр-ка опредѣляютъ только его *форму* (даютъ безконечный рядъ *подобныхъ* треугольниковъ).

Возьмемъ еще соотношеніе сторонъ

$$a : b : c = 5 : 6 : 7.$$

Оно разлагается на три пропорціи:

$$a : b = 5 . 6, \quad b : c = 6 : 7 \quad \text{и} \quad a : c = 5 : 7;$$

но третья пропорція есть слѣдствіе двухъ другихъ; такимъ образомъ взятое соотношеніе содержитъ *два* независимыхъ условія. Оно также опредѣляетъ только *форму* треугольника.

[2]) Напримѣръ, чтобы опредѣлить радіусъ описаннаго круга, достаточно знать сторону и противолежащій уголъ.

[3]) Напомнимъ, что вычисленіе производится обыкновенно при помощи логариѳмовъ, *слѣдов.* только приближенно.

[4]) Т.-е. такое, гдѣ искомыя величины выражены не только черезъ данныя, но и черезъ другія величины, найденныя ранѣе. Неудобство такого рѣшенія — возможность накопленія погрѣшностей въ вычисленіи.

VIII. Прямоугольные треугольники.

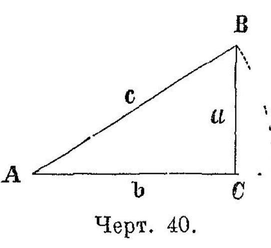
Соотношенія между элементами прямоугольнаго треугольника. Означимъ въ прямоугольномъ треугольникѣ черезъ A и B острые углы и черезъ C прямой уголъ [1]; пусть далѣе числа a, b и c выражаютъ длину сторонъ [2] относительно *общей* единицы.

91*. Для сторонъ прямоугольнаго тр-ка геометрія даетъ соотношеніе $a^2+b^2=c^2$, а для острыхъ угловъ: $A+B=90°$.

Зависимость между острыми углами *тригонометрически* выразится въ томъ, что функціи одного угла равны родственнымъ функціямъ другого (§ 39 п. 3); напримѣръ:

$$\operatorname{sn} A=\operatorname{sn}(90°-B)=\operatorname{cs} B; \quad \operatorname{ctg} B=\operatorname{tg} A; \quad \text{и т. д.}$$

92*. I. Сдѣлаемъ уголъ A центральнымъ, описавъ между его сторонами дугу радіусомъ c. Тогда по § 17 будемъ имѣть



Черт. 40.

$$\frac{a}{c}=\operatorname{sn} A \quad (1) \quad \text{и} \quad \frac{b}{c}=\operatorname{cs} A \quad (2)$$

т.-е. *отъ дѣленія катета на гипотенузу получается: 1) синусъ остраго угла, если дѣлится противолежащій*) катетъ, или 2) косинусъ остраго угла, если дѣлится прилежащій катетъ.*

II. Дѣля равенство (1) на (2) и обратно, найдемъ

$$\frac{a}{b}=\operatorname{tg} A \quad (3) \quad \text{и} \quad \frac{b}{a}=\operatorname{ctg} A \quad (4)$$

т.-е. *отъ дѣленія катета на катетъ получается: 1) тангенсъ остраго угла, если дѣлится противолежащій катетъ, или 2) котангенсъ остраго угла, если дѣлится прилежащій катетъ.*

93. На основаніи сказаннаго легко выразить сторону въ зависимости отъ другой стороны и остраго угла. Напримѣръ:

---

[1] Подъ A, B и C слѣдуетъ понимать градусныя выраженія угловъ.

[2] Противолежащихъ означеннымъ угламъ.

*) Упомянутому острому углу.

Для выраженія c черезъ a и B имѣемъ

$$\frac{a}{c}=\text{cs}\,B, \quad \text{откуда} \quad c=\frac{a}{\text{cs}\,B}.$$

Для выраженія b черезъ a и A имѣемъ:

1) $\frac{b}{a}=\text{ctg}\,A$, откуда $b=a\,.\,\text{ctg}\,A$, или

2) $\frac{a}{b}=\text{tg}\,A$, откуда $b=a:\text{tg}\,A$; и т. д.

Замѣчаніе. Полезно *запомнить* результаты, указанные въ § 61, и еще слѣдующіе два, вытекающіе изъ равенствъ (3) и (4) § 92:

1) *Катетъ равенъ другому катету, умноженному на тангенсъ угла, противолежащаго первому катету.*

2) *Катетъ равенъ другому катету, умноженному на котангенсъ угла, прилежащаго къ первому катету.*

Основные случаи рѣшенія прямоугольныхъ треугольниковъ.

94. ***1-й случай.*** *Даны гипотенуза и острый уголъ (c и A).*

Рѣшеніе. I. Выраженіе искомыхъ величинъ[1]) съ помощью данныхъ:

$$B=90°-A; \quad a=c\,.\,\text{sn}\,A; \quad b=c\,.\,\text{cs}\,A$$

$$S=\frac{ab}{2}=\frac{c^2}{2}\cdot\text{sn}\,A\,.\,\text{cs}\,A=\frac{c^2}{4}\,\text{sn}\,2\,A.$$

II. Числовой примѣръ: $c=857$; $A=32°\,40'\,15''$.

Вычисленіе: $B=90°-A=57°\,19'\,45''$

$a=c\,.\,\text{sn}\,A$	$b=c\,.\,\text{sn}\,B$*)
$\lg c=2{,}93298$	$\lg c=2{,}93298$
+ $\lg \text{sn}\,A=9{,}73224-10$	+ $\lg \text{sn}\,B=9{,}92520-10$
$\lg a=2{,}66522$	$\lg b=2{,}85818$
$a=462{,}611$	$b=721{,}4$

$S=\frac{ab}{2}$

$$\begin{array}{r} \lg a=2{,}66522 \\ +\ \lg b=2{,}85818 \\ \hline \lg 2\,S=5{,}52340 \end{array}$$

$2\,S=333731$; $S=166866$.

---

[1]) Т.-е. угла B, катетовъ a и b и площади S.

*) Для однообразія вмѣсто $b=c\,.\,\text{cs}\,A$ лучше взять $b=c\,.\,\text{sn}\,B$; точность вычисленія останется та же самая.

95. 2-й случай. *Даны катетъ и острый уголъ (a и A).*

Рѣшеніе. I. Выраженіе искомыхъ величинъ съ помощью данныхъ:

$$B=90°-A;\quad \frac{a}{c}=\mathrm{sn}\,A,\quad \text{откуда}\quad c=\frac{a}{\mathrm{sn}\,A};$$

$$b=a\,.\,\mathrm{ctg}\,A\quad \text{или}\quad b=\frac{a}{\mathrm{tg}\,A};\quad S=\frac{ab}{2}=\frac{a^2}{2}\cdot\mathrm{ctg}\,A.$$

II. Числовой примѣръ: $a=982$; $A=63°\,21'\,45''$.

Вычисленіе: $B=90°-A=26°\,38'\,15''$

$c=\frac{a}{\mathrm{sn}\,A}$	$b=\frac{a}{\mathrm{tg}\,A}$
$\lg a=2{,}99211$	$\lg a=2{,}99211$
$-\ \lg \mathrm{sn}\,A=9{,}95127-10$	$-\ \lg \mathrm{tg}\,A=0{,}29966$
$\lg c=3{,}04084$	$\lg b=2{,}69245$
$c=1098{,}6$	$b=492{,}55$

Площадь S вычисляется такъ же, какъ въ § 94 (т.-е. по формулѣ $\lg 2S=\lg a+\lg b$); получимъ $S=241839$.

96. 3-й случай. *Даны гипотенуза и катетъ (c и a).*

Рѣшеніе. I. Выраженіе искомыхъ величинъ съ помощью данныхъ:

$$\mathrm{sn}\,A=\frac{a}{c}{}^{*)};\quad \mathrm{cs}\,B=\frac{a}{c};\quad b=\sqrt{c^2-a^2};\quad S=\frac{a}{2}\sqrt{c^2-a^2}.$$

II. Числовой примѣръ: $c=58{,}5$; $a=47{,}54$.

Вычисленіе. Первый способъ.

$\mathrm{sn}\,A=\frac{a}{c}$	$b=c\,.\,\mathrm{sn}\,B$
$\lg a=1{,}67706$	$\lg c=1{,}76716$
$-\ \lg c=1{,}76716$	$+\ \lg \mathrm{sn}\,B=9{,}76548-10$
$\lg \mathrm{sn}\,A=9{,}90990-10$	$\lg b=1{,}53264$
$A=54°21'20''$	$b=34{,}0908$
$B=35°38'40''$	

Площадь S вычисляется такъ же, какъ въ § 94.

---

*) Выразить *самый уголъ* съ помощью данныхъ мы не можемъ.

Другой способъ. По предыдущему $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{(c+a)(c-a)}$; далѣе возьмемъ формулу $\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{1-\operatorname{cs}B}{1+\operatorname{cs}B}}$ и подставимъ сюда $\operatorname{cs}B=\frac{a}{c}$: получимъ $\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{c-a}{c+a}}$; уголъ A опредѣлимъ по найденному B.

Произведемъ вычисленіе по этому способу.

$c=58,5$	$c-a=10,96$
$a=47,54$	$c+a=106,04$

$\lg(c-a)=1,03981$
$\lg(c+a)=2,02547$

$2\lg b=3,06528$; $\lg b=1,53264$; $b=34,0908$

$2\lg\operatorname{tg}\frac{B}{2}=9,01434-10$; $\lg\operatorname{tg}\frac{B}{2}=9,50717-10$;

$$\frac{B}{2}=17^\circ 49'20''; \quad B=35^\circ 38'40''$$

$$A=54^\circ 21'20''$$

Замѣчаніе. Формулой $\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{c-a}{c+a}}$ *необходимо* пользоваться, если a близко къ c, такъ какъ въ этомъ случаѣ по формулѣ $\frac{a}{c}=\operatorname{sn}A=\operatorname{cs}B$ уголъ опредѣлится недостаточно точно.

97. ***4-й случай.*** *Даны оба катета (a и b).*

Рѣшеніе. I. Выраженіе искомыхъ величинъ съ помощью данныхъ:

$$\operatorname{tg}A=\frac{a}{b}; \quad \operatorname{tg}B=\frac{b}{a}; \quad c=\sqrt{a^2+b^2}; \quad S=\frac{ab}{2}.$$

II. Числовой примѣръ: $a=2,3214$; $b=3,8947$.

Вычисленіе.

$\operatorname{tg}A=\frac{a}{b}$	$c=\frac{a}{\operatorname{sn}A}$
$\lg a=0,36575$	$\lg a=0,36575$
$-\ \lg b=0,59048$	$-\ \lg\operatorname{sn}A=9,70926-10$
$\lg\operatorname{tg}A=9,77527-10$	$\lg c=0,65649$
$A=30^\circ 47'47''$	$c=4,5341.$
$B=59^\circ 12'13''$	

Вычисляя $S=\frac{ab}{2}$, получимъ $S=4,52067$.

Замѣчаніе. Иногда для вычисленія c удобна также формула $c=\sqrt{a^2+b^2}$. Пусть напр. $a=400$ и $b=503$; тогда легко найти непосредственно: $a^2=160000$, $b^2=253009$ и слѣд. $c=\sqrt{413009}$.

Примѣняя теперь логариѳмы, получимъ:

$$\lg c=2,80798;\ c=642,657.$$

Нѣкоторые болѣе сложные случаи рѣшенія прямоугольныхъ треугольниковъ.

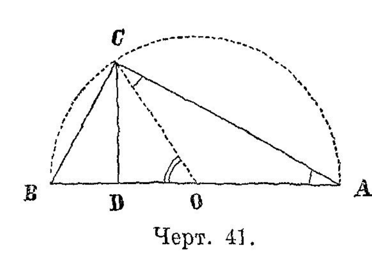
98. ***Задача 1.*** *Даны гипотенуза и отношеніе катетовъ* $(c,\ a:b=m:n)$.

Рѣшеніе. Имѣемъ $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$; но $\frac{a}{b}=\operatorname{tg} A$; такимъ образомъ $\operatorname{tg} A=\frac{m}{n}$. Опредѣливъ отсюда A, поступаемъ далѣе какъ въ § 94.

99. ***Задача 2.*** *Даны гипотенуза и соотвѣтствующая ей высота* (c *и* h).

Рѣшеніе. 1-й способъ. Имѣемъ систему уравненій: $h=b\,.\operatorname{sn} A$ и $b=c\,.\operatorname{cs} A$. Исключивъ b, получимъ $h=c\,.\operatorname{sn} A\,.\operatorname{cs} A=\frac{c}{2}\cdot\operatorname{sn} 2A$; отсюда $\operatorname{sn} 2A=\frac{2h}{c}$. Опредѣливъ $2A$*) и затѣмъ A, поступаемъ далѣе какъ въ § 94.

2-й способъ. Пусть будетъ ABC (черт. 41) искомый треугольникъ.



Черт. 41.

Воспользуемся тѣмъ, что гипотенуза служитъ діаметромъ описанной окружности. Пусть будетъ O средина гипотенузы; соединивъ C и O, найдемъ: $CD=CO.\operatorname{sn} COD$ или $h=\frac{c}{2}\cdot\operatorname{sn} 2A$, откуда $\operatorname{sn} 2A=\frac{2h}{c}$, и т. д.

---

*) Такъ какъ $0<A<90°$, то $0<2A<180°$; а въ этихъ границахъ синусъ даетъ *два* угла: $2A_1=\varphi$ и $2A_2=180°-\varphi$. Но легко убѣдиться, что при обоихъ углахъ *форма* треугольника будетъ одинакова; поэтому для задачи достаточно взять $2A_1=\varphi$.

3-й способъ. Имѣемъ уравненія: $a^2+b^2=c^2$ и $ab=ch$. Изъ нихъ получимъ $(a+b)^2=c^2+2ch$ и $(a-b)^2=c^2-2ch$; отсюда: $a+b=\sqrt{c(c+2h)}$ и $a-b=\sqrt{c(c-2h)}$ *). Вычисливъ $a+b$ и $a-b$, найдемъ затѣмъ a и b; и т. д.

Замѣчаніе. Изъ *построенія* видно, что задача невозможна, если $h>\frac{c}{2}$. *Тригонометрически* это выразится въ томъ, что получимъ $\operatorname{sn}2A>1$ (или $\lg\operatorname{sn}2A>0$); а при *3-мъ способѣ*—въ томъ, что получимъ для $a-b$ мнимое значеніе.

100. ***Задача 3.*** *Даны острый уголъ и сумма гипотенузы съ катетомъ* $(A,\ c+b=m)$.

Рѣшеніе. Имѣемъ: $c+b=m$ и $b=c\,.\operatorname{cs}A$; отсюда: $c(1+\operatorname{cs}A)=m$; $c=\frac{m}{1+\operatorname{cs}A}=m:2\operatorname{cs}^2\frac{A}{2}$.

Далѣе: $b=m-c$; $a=c\,.\operatorname{sn}A=\left(m:2\operatorname{cs}^2\frac{A}{2}\right)\cdot 2\operatorname{sn}\frac{A}{2}\operatorname{cs}\frac{A}{2}=$ $=m\,.\operatorname{tg}\frac{A}{2}$; $B=90^\circ-A$.

Подобнымъ же пріемомъ рѣшается прямоугольный треугольникъ *по острому углу и разности между гипотенузой и катетомъ.*

101. ***Задача 4.*** *Даны острый уголъ и сумма катетовъ* $(A,\ a+b=m)$.

Рѣшеніе. Въ уравненіи $a+b=m$ выразимъ катеты съ помощью гипотенузы и угла A; получимъ послѣдовательно:

$$c\,.\operatorname{sn}A+c\,.\operatorname{cs}A=m;\quad c[\operatorname{sn}A+\operatorname{sn}(90^\circ-A)]=m;$$

$c\,.\,2\operatorname{sn}45^\circ\,.\operatorname{cs}(A-45^\circ)=m$. Отсюда $c=\frac{m}{\sqrt{2}\,.\operatorname{cs}(A-45^\circ)}$.

Далѣе поступаемъ какъ въ § 94.

Тотъ же способъ примѣняется и въ случаѣ *разности* катетовъ.

102. ***Задача 5.*** *Даны гипотенуза и сумма катетовъ* $(c,\ a+b=m)$.

Рѣшеніе. Поступая какъ въ предыдущей задачѣ, найдемъ $c\,.\,2\operatorname{sn}45^\circ\,.\operatorname{cs}(A-45^\circ)=m$; отсюда $\operatorname{cs}(A-45^\circ)=\frac{m}{c\sqrt{2}}$.

---

*) Означая черезъ a большій катетъ.

Опредѣливъ $A-45°$, а затѣмъ A, будемъ имѣть извѣстными гипотенузу и острый уголъ.

Такъ же слѣдуетъ поступать и въ случаѣ *разности* катетовъ.

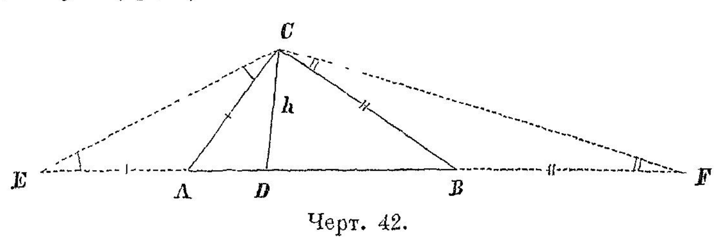
103. ***Задача 6.*** *Даны катетъ и сумма гипотенузы съ другимъ катетомъ* $(a,\ c+b=m)$.

Рѣшеніе. Въ уравненіи $c+b=m$ выразимъ c и b черезъ извѣстный катетъ и противоположный ему уголъ. Получимъ послѣдовательно: $\frac{a}{\text{sn}\,A}+a\,.\,\text{ctg}\,A=m$; $a\,.\,\frac{1+\text{cs}\,A}{\text{sn}\,A}=m$;

$a\cdot\dfrac{2\,\text{cs}^2\frac{A}{2}}{2\,\text{sn}\frac{A}{2}\,\text{cs}\frac{A}{2}}=m$; отсюда $\text{ctg}\frac{A}{2}=\frac{m}{a}\cdot$ По опредѣленіи A будутъ извѣстны катетъ и острый уголъ.

Такъ же рѣшается задача и тогда, если дано a и $c-b$.

104. ***Задача 7.*** *Даны периметръ и высота, соотвѣтствующая гипотенузѣ* $(2p,\ h)$.



Черт. 42.

Рѣшеніе. Пусть будетъ ABC прямоугольный треугольникъ и CD его высота. Отложивъ $AE=AC$ и $BF=BC$, будемъ имѣть $EF=2p$; а соединивъ C съ E и F, получимъ: $\angle E=\frac{A}{2}$ и $\angle F=\frac{B}{2}\cdot$

Теперь выразимъ отрѣзки ED и DF съ помощью h и угловъ E и F и сложимъ полученныя выраженія:

$$ED=h\,.\,\text{ctg}\,E=h\,.\,\text{ctg}\frac{A}{2};\ DF=h\,.\,\text{ctg}\,F=h\,.\,\text{ctg}\frac{B}{2};\ ED+DF=2p.$$

Такимъ образомъ $2\,p=h\left(\text{ctg}\frac{A}{2}+\text{ctg}\frac{B}{2}\right)=h\cdot\dfrac{\text{sn}\frac{A+B}{2}}{\text{sn}\frac{A}{2}\,\text{sn}\frac{B}{2}}$;

такъ какъ $\frac{A+B}{2}=45°$, то $\text{sn}\frac{A+B}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$; замѣняя получимъ

$2p = \dfrac{h}{\sqrt{2}\,.\,\mathrm{sn}\,\dfrac{A}{2}\,\mathrm{sn}\,\dfrac{B}{2}}$. Изъ этого уравненія найдемъ

$$2\,\mathrm{sn}\,\frac{A}{2}\,\mathrm{sn}\,\frac{B}{2} = \frac{h}{p\sqrt{2}}.$$

Преобразуемъ первую часть:

$$2\,\mathrm{sn}\,\frac{A}{2}\,\mathrm{sn}\,\frac{B}{2} = \mathrm{cs}\left(\frac{A}{2} - \frac{B}{2}\right) - \mathrm{cs}\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = \mathrm{cs}\,\frac{A-B}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^{*)};$$

послѣ этого соотвѣтствующее уравненіе приметъ видъ

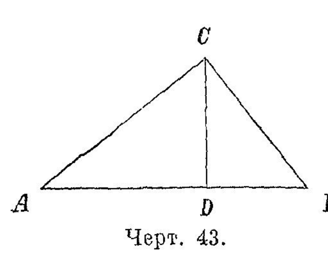
$$\mathrm{cs}\,\frac{A-B}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{h}{p\sqrt{2}}.$$

Отсюда $\mathrm{cs}\,\dfrac{A-B}{2} = \dfrac{h+p}{p\sqrt{2}}$, что̀ даетъ возможность опредѣлить $\dfrac{A-B}{2}$, а затѣмъ A и B**).

---

105. Въ слѣдующихъ задачахъ дается *соотношеніе* элементовъ прямоугольнаго треугольника и требуется опредѣлить углы.

Задача 8. *Высота дѣлитъ гипотенузу въ среднемъ и крайнемъ отношеніи.*



Черт. 43.

Рѣшеніе. По условію имѣемъ $\dfrac{BD}{AD} = \dfrac{AD}{AB}$; но $\dfrac{BD}{AD}{}^{***)} = \dfrac{a^2}{b^2}$ и слѣдов. $\dfrac{BD}{AD} = \mathrm{tg}^2 A$, а $\dfrac{AD}{AB}{}^{****)} = \dfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$.

Такимъ образомъ

$$\mathrm{tg}^2 A = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) = 2\,\mathrm{sn}\,18°,$$

откуда: $\mathrm{tg}\,A = \sqrt{2\,\mathrm{sn}\,18°}$, $A = 38°10'23''$.

---

*) $\mathrm{cs}\left(\dfrac{A}{2} + \dfrac{B}{2}\right) = \mathrm{cs}\,45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

**) Пусть напр. $\dfrac{A-B}{2} = \varphi$; такъ какъ кромѣ того имѣемъ $\dfrac{A+B}{2} = 45°$, то, складывая и вычитая эти равенства, найдемъ $A = 45° + \varphi$ и $B = 45° - \varphi$.

***) По извѣстной геометрической теоремѣ.

****) Если величина раздѣлена въ среднемъ и крайнемъ отношеніи, то бо̀льшая часть равна половинѣ всей величины, умноженной на $(\sqrt{5}-1)$; такъ что $AD = \dfrac{AB}{2}(\sqrt{5}-1)$.

106. ***Задача 9.*** *Стороны прямоугольнаго треугольника составляютъ ариѳметическую прогрессію.*

Рѣшеніе. Означая черезъ a меньшій катетъ, будемъ имѣть, согласно условію, $c-b=b-a$; откуда $c+a=2b$; подставляя сюда $a=c\,.\,\mathrm{cs}\,B$ и $b=c\,.\,\mathrm{sn}\,B$, получимъ $c+c\,.\,\mathrm{cs}\,B=2c\,.\,\mathrm{sn}\,B$.

Такъ какъ c не равно нулю, то $1+\mathrm{cs}\,B=2\,\mathrm{sn}\,B$; переходя здѣсь на функціи половиннаго угла, получимъ послѣдовательно:

$$2\,\mathrm{cs}^2\frac{B}{2}=4\,\mathrm{sn}\frac{B}{2}\,\mathrm{cs}\frac{B}{2};\qquad \mathrm{cs}\,\frac{B}{2}\left(\mathrm{cs}\,\frac{B}{2}-2\,\mathrm{sn}\,\frac{B}{2}\right)=0;$$

отсюда: $\quad(1)\quad \mathrm{cs}\frac{B}{2}=0 \quad$ и $\quad(2)\quad \mathrm{cs}\frac{B}{2}=2\,\mathrm{sn}\frac{B}{2}.$

Уравненіе (1) непригодно для *задачи*, а изъ уравненія (2), раздѣливъ обѣ части на $\mathrm{sn}\,\frac{B}{2}$, получимъ $\mathrm{ctg}\,\frac{B}{2}=2$, откуда найдемъ $B=53^\circ 7' 48''$.

Замѣчаніе. Казалось бы,—проще воспользоваться тѣмъ, что треугольникъ съ отношеніемъ сторонъ 3 : 4 : 5 удовлетворяетъ условію задачи. Но не надо забывать, что, поступая такъ, мы оставили бы открытымъ вопросъ о *числѣ* рѣшеній*).

107. ***Задача 10.*** *Стороны прямоугольнаго треугольника составляютъ геометрическую прогрессію.*

Рѣшеніе. Означая черезъ a меньшій катетъ, будемъ имѣть $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$; но $\frac{a}{b}=\mathrm{tg}\,A$ и $\frac{b}{c}=\mathrm{cs}\,A$; такимъ образомъ $\mathrm{tg}\,A=\mathrm{cs}\,A$, откуда находимъ послѣдовательно:

$$\frac{\mathrm{sn}\,A}{\mathrm{cs}\,A}=\mathrm{cs}\,A;\quad \mathrm{sn}\,A=\mathrm{cs}^2 A;\quad \mathrm{sn}\,A=1-\mathrm{sn}^2 A;\quad \mathrm{sn}\,A=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Изъ полученныхъ значеній для $\mathrm{sn}\,A$ второе невозможно, такъ какъ по абсолютной величинѣ превышаетъ единицу; а пользуясь первымъ значеніемъ ($\mathrm{sn}\,A=2\,\mathrm{sn}\,18^\circ$), найдемъ $A=38^\circ 10' 23''$.

---

*) Предлагаемъ учащемуся: 1) показать, что изъ равенства $\mathrm{ctg}\frac{B}{2}=2$ слѣдуетъ $a:b:c=3:4:5$; 2) вопросъ о сторонахъ рѣшить алгебраически [съ помощью уравненія $(b+x)^2=b^2+(b-x)^2$] и полученное сравнить съ уравненіями (1) и (2) § 106.

Замѣчаніе. Въ §§ 107 и 105 *приближенныя* значенія A равны; можно ожидать, что окажутся равными и *точныя* значенія, а тогда условія задачъ 8 и 10 будутъ *слѣдствіями* одно другого. И дѣйствительно: 1) изъ равенства $\operatorname{sn} A = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ можно получить $\operatorname{tg}^2 A = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$, а 2) равносильность условій нетрудно доказать геометрически.

108. Замѣчаніе о способахъ рѣшенія треугольниковъ. Способы, предложенные въ § 99, различаются между собой не только по содержанію, но и по самому своему *характеру;* укажемъ это различіе.

Первый способъ — *алгебраическаго* характера: опредѣленіе угла A мы свели къ составленію системы уравненій.

Второй способъ основанъ на геометрическихъ соображеніяхъ, сходныхъ съ тѣми, какія прилагаются въ соотвѣтствующей задачѣ на *построеніе.* Такой способъ будемъ называть *геометрическимъ;* онъ нагляднѣе алгебраическаго и иногда проще его[1]).

Въ третьемъ способѣ сначала выдѣлена *геометрическая задача на вычисленіе* и только меньшая часть работы осталась на долю тригонометріи.

Въ § 104 содержится примѣръ *смѣшаннаго* способа: задача сведена на рѣшеніе уравненія, но для того, чтобы его составить, сдѣлано построеніе.

Такіе же способы мы будемъ прилагать и далѣе. Какой изъ нихъ выгоднѣе примѣнить въ томъ или другомъ случаѣ, — это зависитъ отъ свойствъ задачи; вообще же болѣе надежнымъ можно признать алгебраическій способъ*).

---

[1]) Говоря это, мы имѣемъ въ виду также и тѣ задачи, которыя будутъ рѣшены далѣе.

*) Геометрическій способъ нерѣдко требуетъ находчивости и менѣе надеженъ со стороны *общности* рѣшенія (какъ увидимъ впослѣдствіи).

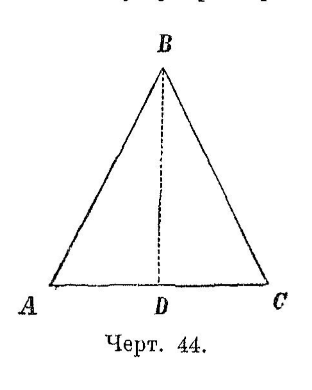
IX. Нѣкоторыя примѣненія прямоугольныхъ треугольниковъ.

109. Общее замѣчаніе. Прямоугольные треугольники примѣняются между прочимъ къ равнобедреннымъ треугольникамъ, къ правильнымъ многоугольникамъ и къ кругу.

Бо́льшая часть задачъ изъ названныхъ отдѣловъ рѣшаются съ помощью только *одного* прямоугольнаго треугольника: для этого въ равнобедренномъ треугольникѣ проводятъ высоту, а въ правильномъ многоугольникѣ радіусъ и апоѳему.

Разберемъ нѣсколько примѣровъ.

110. ***Задача 1.*** *Рѣшить равнобедренный треугольникъ по основанію b и углу при вершинѣ B.*



Черт. 44.

Рѣшеніе. Для угловъ A и C имѣемъ: $A=C$ и $A+C=180°-B$; отсюда $A=C=90°-\frac{B}{2}$. Чтобы опредѣлить $a=c$ и S, проведемъ высоту BD, которая дастъ *равные* прямоугольные треугольники. Изъ тр-ка CBD найдемъ:

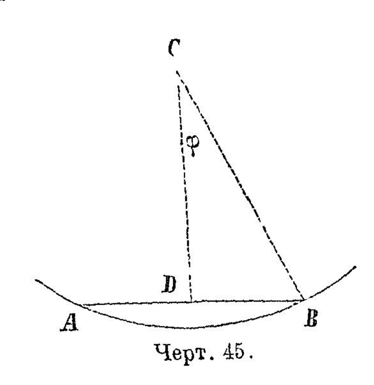
1) $\frac{CD}{BC}=\text{sn}\,\frac{B}{2}$ или $\frac{b}{2}:a=\text{sn}\,\frac{B}{2}$,

откуда $a=\frac{b}{2}:\text{sn}\,\frac{B}{2}$;

2 $BD=CD\,.\,\text{ctg}\,\frac{B}{2}$, съ помощью чего получимъ

$$S=CD\,.\,BD=\frac{b^2}{4}\cdot\text{ctg}\,\frac{B}{2}.$$

111. *Задача 2. Сторону правильнаго вписаннаго семиугольника выразить въ десятичныхъ доляхъ радіуса.*



Черт. 45.

Рѣшеніе. Означимъ искомую сторону черезъ a_7. Проведя радіусъ CB и апоѳему CD, найдемъ

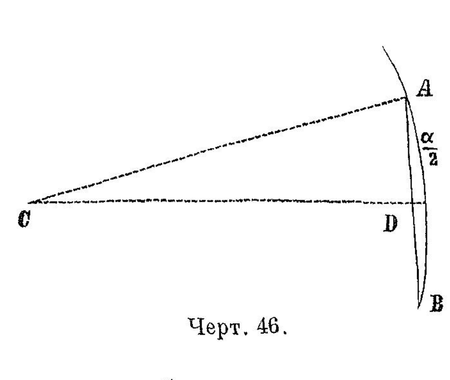
$$\frac{1}{2}a_7 = R \,.\, \mathrm{sn}\,\varphi, \quad \text{откуда}$$

$$a_7 = R \,.\, 2\,\mathrm{sn}\,\varphi,$$

при чемъ $\varphi = \frac{180°}{7} = 25°\,42'\,51''$ (съ точностью до $0{,}5''$); теперь съ помощью логариѳмовъ получимъ $2\,\mathrm{sn}\,\varphi = 0{,}86776$. Такимъ образомъ $a_7 = 0{,}86776\,R$.

Замѣчаніе. Въ черченіи, чтобы построить приближенно a_7, дѣлятъ пополамъ a_3. Полученный выше результатъ позволяетъ судить о *степени точности* этого пріема $\left(\frac{1}{2}\,a_3 = R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}86603\,R\right)$.

112. *Задача 3. Опредѣлить величину дуги*), если хорда равна половинѣ радіуса.*



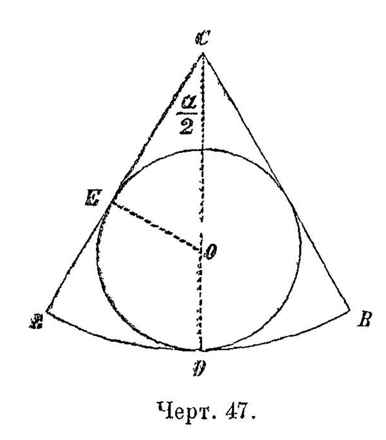
Черт. 46.

Рѣшеніе. Означимъ искомую величину дуги черезъ α. Проведя радіусъ CA и перпендикуляръ CD, изъ треугольника CAD получимъ $\frac{AD}{CA} = \mathrm{sn}\,\frac{\alpha}{2}$; но по условію имѣемъ $\frac{AB}{CA} = \frac{1}{2}$, слѣдовательно $\frac{AD}{CA} = \frac{1}{4}$; такимъ образомъ $\mathrm{sn}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}$, откуда: $\frac{\alpha}{2} = 14°\,28'\,39''$; $\alpha = 28°\,57'\,18''$.

---

*) Т.-е. ея градусное выраженіе.

113. *Задача 4. Въ круговомъ секторѣ центральный уголъ равенъ α, а радіусъ дуги равенъ R. Опредѣлить радіусъ r круга, вписаннаго въ этотъ секторъ.*



Черт. 47.

Рѣшеніе. 1-й способъ. Пусть будетъ O центръ вписаннаго круга. Проведя OE и CD (въ точки касанія), будемъ имѣть

$$OE = OC \,.\, \mathrm{sn}\frac{\alpha}{2}$$

или $$r = (R - r)\,.\,\mathrm{sn}\frac{\alpha}{2}.$$

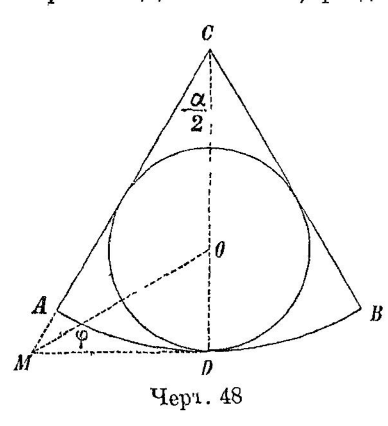
Отсюда найдемъ

$$r = \left(R\,.\,\mathrm{sn}\frac{\alpha}{2}\right) : \left(1 + \mathrm{sn}\frac{\alpha}{2}\right);$$

но $1 + \mathrm{sn}\frac{\alpha}{2} = 1 + \mathrm{cs}\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) =$

$= 2\mathrm{cs}^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)$; слѣдов. $r = \frac{R}{2} \cdot \frac{\mathrm{sn}\frac{\alpha}{2}}{\mathrm{cs}^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)}$.

2-й способъ. Сначала найдемъ искомый радіусъ посредствомъ *построенія.* Для этого: 1) раздѣлимъ уголъ α пополамъ — линіей CD, 2) изъ точки D проведемъ касательную къ дугѣ до пересѣченія — въ точкѣ M — съ продолженіемъ радіуса CA и 3) раздѣлимъ пополамъ уголъ CMD. Точка пересѣченія его равнодѣлящей съ линіей CD и есть центръ вписаннаго круга.



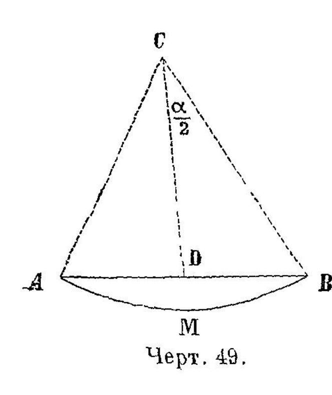
Черт. 48

Изъ тр-ка MOD найдемъ
$$r = MD\,.\,\mathrm{tg}\,\varphi.$$

Линія MD опредѣлится изъ треугольника MCD, а именно $MD = CD\,.\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = R\,.\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$; для угла φ имѣемъ $\varphi = \frac{1}{2}\,CMD = \frac{1}{2}\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = 45^\circ - \frac{\alpha}{4}$. Пользуясь найденными выраженіями, полу-

чимъ окончательно $r = R \cdot \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \mathrm{tg}\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right)$*).

114. ***Задача 5.*** *Опредѣлить площадь сегмента, если даны хорда $a=10$ и дуга $\alpha = 57° 26'$.*



Черт. 49.

Рѣшеніе. I. Составленіе формулы. Проведя радіусы CA и CB, замѣтимъ, что искомую площадь можно получить какъ разность площадей сектора $CAMB$ и треугольника ACB.

1) Для площади сектора имѣемъ $S_1 = \pi R^2 \cdot \frac{\alpha}{360°}$**); а изъ треугольника BCD получимъ $R = \frac{a}{2} : \mathrm{sn}\frac{\alpha}{2}$; такимъ образомъ $S_1 = \left(\pi \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \frac{\alpha}{360°}\right) : \mathrm{sn}^2\frac{\alpha}{2}$.

2) Площадь треугольника ACB опредѣлится какъ въ § 110, а именно $S_2 = \frac{a^2}{4} \cdot \mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2}$.

3) Итакъ $S = S_1 - S_2 = \frac{\pi a^2}{4\,\mathrm{sn}^2\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\alpha}{360°} - \frac{a^2}{4} \cdot \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

II. Вычисленіе. Подставляя въ предыдущую формулу данныя числа, получимъ (послѣ сокращенія)

$$S = S_1 - S_2 = \frac{\pi \,.\, 3446\text{***)}}{\mathrm{sn}^2\, 28°\, 43' \,.\, 864} - 25 \,.\, \mathrm{ctg}\, 28°\, 43'.$$

Вычислимъ отдѣльно S_1 и S_2 и сдѣлаемъ вычитаніе.

(вычисленіе см. на слѣд. стр.)

---

*) Предлагаемъ учащемуся показать *тождественность* обоихъ выраженіи, полученныхъ для r.

**) Изъ пропорціи $\frac{S_1}{\pi R^2} = \frac{\alpha}{360°}$.

***) $\frac{\alpha}{360°} = \frac{57° 26'}{360°} = \frac{3446'}{21600'} = \frac{3446}{21600}$.

$$S = S_1 - S_2 = \frac{\pi \,.\, 3446}{\mathrm{sn}^2\, 28^\circ\, 43' \,.\, 864} - 25 \,.\, \mathrm{ctg}\, 28^\circ\, 43'.$$

Вычисленіе.

Для S_1)

$$+\begin{array}{r} \lg \pi = 0{,}49715 \\ \lg 3446 = 3{,}53732 \\ \hline 4{,}03447 \\ -\ 2{,}29985 \end{array} \quad \Bigg| \quad +\begin{array}{r} \lg \mathrm{sn}^2\, 28^\circ\, 43' = 9{,}36334 - 10 \\ \lg 864 = 2{,}93651 \\ \hline 2{,}29985 \end{array}$$

$$\lg S_1 = 1{,}73462; \quad S_1 = 54{,}2775$$

Для S_2)

$$+\begin{array}{r} \lg 25 = 1{,}39794 \\ \lg \mathrm{ctg}\, 28^\circ\, 43' = 0{,}26133 \\ \hline \lg S_2 = 1{,}65927; \end{array} \quad S_2 = 45{,}6320$$

Для S)

$$S = S_1 - S_2 = 8{,}6455.$$

Итакъ искомая площадь содержитъ 8,6455 кв. единицъ.

X. Косоугольные треугольники.

Соотношенія между элементами косоугольнаго треугольника.

115*. Сначала укажемъ, какъ выразится *тригонометрически* зависимость между *углами* треугольника.

1) Такъ какъ въ треугольникѣ сумма двухъ угловъ и третій уголъ дополняютъ другъ друга до 180°, то ихъ синусы равны; а косинусы, тангенсы и котангенсы имѣютъ одинаковую абсолютную величину, но противоположные знаки[1]). Такъ будемъ имѣть: $\operatorname{sn}(B+C)=\operatorname{sn}A$; $\operatorname{cs}(B+C)=-\operatorname{cs}A$; $\operatorname{tg}B=-\operatorname{tg}(A+C)$; и т. д.

2) Такъ какъ въ треугольникѣ половина одного угла и полусумма двухъ другихъ угловъ составляютъ вмѣстѣ 90°, то функціи полусуммы двухъ угловъ треугольника равны родственнымъ функціямъ половины третьяго угла[2]). Напримѣръ:

$$\operatorname{sn}\frac{A+B}{2}=\operatorname{cs}\frac{C}{2};\quad \operatorname{tg}\frac{B+C}{2}=\operatorname{ctg}\frac{A}{2};\quad \operatorname{sn}\frac{B}{2}=\operatorname{cs}\frac{A+C}{2};\ \text{и т. д.}$$

116. Разсмотримъ теперь зависимость между углами и линейными элементами.

Теорема. *Во всякомъ треугольникѣ сторона равна діаметру описаннаго круга, умноженному на синусъ противолежащаго угла.*

См. § 62.

Слѣдствіе. Изъ равенствъ:

$$a=2R\,.\operatorname{sn}A,\quad b=2R\,.\operatorname{sn}B\quad \text{и}\quad c=2R\,.\operatorname{sn}C$$

слѣдуетъ

$$\frac{a}{\operatorname{sn}A}=\frac{b}{\operatorname{sn}B}=\frac{c}{\operatorname{sn}C}=2R$$

(см. также слѣд. стр.)

---

1) См. § 39 п. 1 а).

2) См. § 39 п. 3.

т.-е. *дѣля стороны треугольника на синусы противолежащихъ угловъ, получимъ равныя частныя: они выражаютъ діаметръ описаннаго круга.*

117*. Теорема. *Во всякомъ треугольникѣ стороны относятся какъ синусы противолежащихъ угловъ* ***(теорема синусовъ).***

Доказ. Для всякаго треугольника имѣемъ:

$$a = 2R \,.\, \operatorname{sn} A, \quad b = 2R \,.\, \operatorname{sn} B, \quad c = 2R \,.\, \operatorname{sn} C;$$

отсюда слѣдуетъ

$$a : b : c = \operatorname{sn} A : \operatorname{sn} B : \operatorname{sn} C \qquad *) \qquad \text{(XXX)}$$

118* Теорема. *Сумма и разность двухъ сторонъ треугольника относятся между собой какъ тангенсы полусуммы и полуразности противолежащихъ угловъ* ***(теорема тангенсовъ).***

Доказ. По § 116 найдемъ

$$a + b = 2R(\operatorname{sn} A + \operatorname{sn} B) \quad \text{и} \quad a - b = 2R(\operatorname{sn} A - \operatorname{sn} B);$$

отсюда

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{sn} A + \operatorname{sn} B}{\operatorname{sn} A - \operatorname{sn} B}.$$

Примѣняя здѣсь ко второй части формулу XXVII (§ 79), получимъ

$$(a+b) : (a-b) = \operatorname{tg}\frac{A+B}{2} : \operatorname{tg}\frac{A-B}{2}. \qquad \text{(XXXI)}$$

119*. Теорема. *Во всякомъ треугольникѣ сторона равна суммѣ двухъ другихъ сторонъ, соотвѣтственно умноженныхъ на косинусъ угла, образуемаго съ первой стороной.*

См. § 63.

120*. Теорема. *Во всякомъ треугольникѣ квадратъ стороны равенъ суммѣ квадратовъ двухъ другихъ сторонъ безъ удвоеннаго произведенія ихъ, умноженнаго на косинусъ угла между ними.*

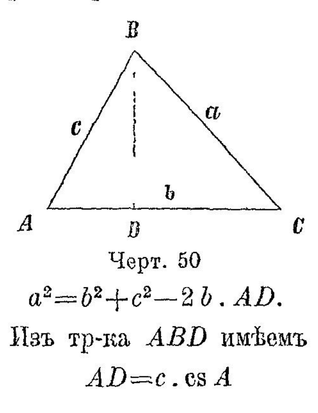
---

*) ***Примѣръ.*** Опредѣлить $a : b : c$, если $A : B : C = 3 : 4 : 5$.

Сначала найдемъ. $A = 45°$, $B = 60°$ и $C = 75°$. Теперь будемъ имѣть $a : b : c = \operatorname{sn} 45° : \operatorname{sn} 60° : \operatorname{sn} 75°$. Подставляя $\operatorname{sn} 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{sn} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\operatorname{sn} 75° = \operatorname{cs} 15° = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$, получимъ

$$a : b : c = \sqrt{2} : \sqrt{3} \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

Доказ. Преобразуемъ геометрическія выраженія для квадрата стороны треугольника противъ остраго угла и противъ тупого угла.

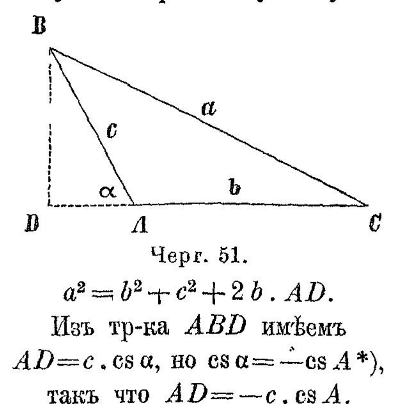


Черт. 50

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,.\,AD.$

Изъ тр-ка ABD имѣемъ

$AD = c\,.\,\mathrm{cs}\,A$



Черт. 51.

$a^2 = b^2 + c^2 + 2\,b\,.\,AD.$

Изъ тр-ка ABD имѣемъ

$AD = c\,.\,\mathrm{cs}\,\alpha$, но $\mathrm{cs}\,\alpha = -\mathrm{cs}\,A$ *),

такъ что $AD = -c\,.\,\mathrm{cs}\,A.$

Подстановка AD приводитъ къ *общей* формулѣ

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\,.\,\mathrm{cs}\,A. \qquad \text{(XXXII)}$$

121. Теорема. *Высота треугольника равна боковой сторонѣ, умноженной на синусъ угла между нею и основаніемъ.*

Пусть будетъ c боковая сторона и b основаніе; соотвѣтствующую высоту означимъ черезъ h_b. Требуется доказать, что $h_b = c\,.\,\mathrm{sn}\,A.$

Доказ. Здѣсь слѣдуетъ различать два случая.

Уголъ A острый (черт. 50). Тогда изъ тр-ка ABD получимъ прямо

$h_b = c\,.\,\mathrm{sn}\,A$

Уголъ A тупой (черт. 51). Тогда изъ тр-ка ABD получимъ $h_b = c\,.\,\mathrm{sn}\,\alpha$; но $\mathrm{sn}\,\alpha = \mathrm{sn}\,A$; а потому $h_b = c\,.\,\mathrm{sn}\,A.$

Формула получилась *общая.*

122. Въ этомъ параграфѣ будутъ выведены *формулы для опредѣленія угловъ треугольника по тремъ сторонамъ.*

Изъ равенства XXXII находимъ

$$\mathrm{cs}\,A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc};$$

но эта формула при *многозначныхъ* числахъ неудобна.

*) См. § 39 п. 1 и подстрочное примѣчаніе.

2) Слѣдующія преобразованія той же формулы приводятъ къ выраженіямъ пригоднымъ для логариѳмированія.

Имѣемъ $\operatorname{cs} A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}$; отсюда

$$1 - \operatorname{cs} A = \frac{2\,bc - b^2 - c^2 + a^2}{2\,bc}$$

$$= \frac{a^2 - (b-c)^2}{2\,bc}$$

$$= \frac{(a+b-c)\ (a-b+c)}{2\,bc}$$

$$2\operatorname{sn}^2\frac{A}{2} \overset{*)}{=} \frac{2\,(p-c)\,.\,2\,(p-b)}{2\,bc}$$

$$\operatorname{sn}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)\ (p-c)}{bc}} \qquad \text{(XXXIII)}$$

$$1 + \operatorname{cs} A = \frac{2\,bc + b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}$$

$$= \frac{(b+c)^2 - a^2}{2\,bc}$$

$$= \frac{(b+c+a)\ (b+c-a)}{2\,bc}$$

$$2\operatorname{cs}^2\frac{A}{2} \overset{*)}{=} \frac{2\,p\,.\,2\,(p-a)}{2\,bc}$$

$$\operatorname{cs}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p\,(p-a)}{bc}} \qquad \text{(XXXIV)}$$

(Такъ какъ въ треугольникѣ половина угла всегда менѣе 90°, то $\operatorname{sn}\frac{A}{2}$ и $\operatorname{cs}\frac{A}{2}$ положительны, что̀ и принято во вниманіе при извлеченіи корня).

Дѣля равенство XXXIII на XXXIV, найдемъ

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)\ (p-c)}{p\,(p-a)}}.^{**)} \qquad \text{(XXXV)}$$

(По *аналогіи* съ выведенными можно составить формулы и для остальныхъ угловъ.)

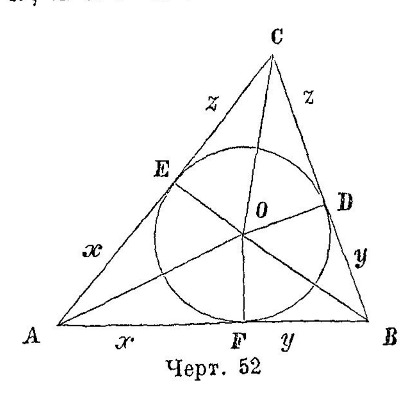
123. *Тангенсъ половины угла треугольника легко опредѣлить также съ помощью радіуса описаннаго круга.* Сдѣлаемъ это.

---

*) Полагаемъ $a + b + c = 2\,p$; тогда
$a + b - c = 2\,p - 2\,c = 2\ (p - c)$
$a + c - b = 2\,(p - b)$
$b + c - a = 2\,(p - a)$.

**) Мнемоническое замѣчаніе къ форм XXXV. въ числителѣ вычитаются изъ p стороны, *заключающія* искомый уголъ.

Пусть будутъ. O центръ вписаннаго круга; r его радіусъ; D, E и F точки касанія. Замѣтимъ, что линіи OA, OB и OC дѣлятъ углы треугольника пополамъ и что отрѣзки сторонъ при общей вершинѣ равны[1]).



Черт. 52

Сначала опредѣлимъ эти отрѣзки. Означая ихъ — въ порядкѣ вершинъ треугольника — черезъ x, y и z, получимъ

$$x+y+z=p;$$

но $$y+z=BC=a;$$

слѣдов. $x=p-a$.

По аналогіи:

$$y=p-b \quad \text{и} \quad z=p-c.$$

Теперь изъ прямоугольныхъ треугольниковъ найдемъ

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{r}{p-a};\quad \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{r}{p-b};\quad \operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{r}{p-c}. \qquad \text{(XXXVI)}$$

Чтобы произвести вычисленіе по этимъ формуламъ, надо сперва опредѣлить r; для этого послужатъ равенства

$$S=r\,.\,p^{*)} \quad \text{и} \quad S=\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)};$$

отсюда $$r=\frac{S}{p}=\sqrt{\frac{(p-a)\;(p-b)\;(p-c)}{p}}.$$

124. Выраженія площади треугольника. Къ извѣстнымъ изъ геометріи выраженіямъ площади треугольника по *длинѣ линій* тригонометрія присоединяетъ еще выраженія, *содержащія углы*. Выведемъ два болѣе употребительныя.

1) По геометрической теоремѣ имѣемъ $S=\frac{1}{2}\,b\,.\,h_b$; но $h_b=c\,.\,\operatorname{sn}A$ (§ 121); такимъ образомъ

$$S=\frac{1}{2}\,bc\,.\,\operatorname{sn}A \qquad \text{(XXXVII)}$$

(словесное выраженіе см. на слѣд. стр.)

---

[1]) Напр. $AE=AF$ и т д.

*) Площадь описанной фигуры равна произведенію радіуса на половину периметра

т.-е. *площадь всякаго треугольника равна половинѣ произведенія двухъ сторонъ, умноженнаго на синусъ угла между ними.*

2) Выраженіе $S=\frac{1}{2}bc\,.\,\text{sn}\,A$ преобразуемъ, пользуясь равенствами $b=\frac{a}{\text{sn}\,A}\cdot\text{sn}\,B$*) и $c=\frac{a}{\text{sn}\,A}\cdot\text{sn}\,C$;

получимъ $S=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\text{sn}\,B\,.\,\text{sn}\,C}{\text{sn}\,A}$; но $\text{sn}\,A=\text{sn}\,(B+C)$;

поэтому $$S=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\text{sn}\,B\,.\,\text{sn}\,C}{\text{sn}\,(B+C)}\text{**)} \qquad \text{(XXXVIII)}$$

Замѣчаніе. Формулы XXXVII и XXXVIII выведены изъ соотношеній, обладающихъ *общностью*, а потому и сами имѣютъ то же свойство.

Основные случаи рѣшенія косоугольныхъ треугольниковъ.

125. ***1-й случай.*** *Даны сторона и два угла* (a, B, C).

Рѣшеніе. Для третьяго угла имѣемъ $A=180°-(B+C)$.

Чтобы опредѣлить стороны b и c, сперва находимъ $2\,R=\frac{a}{\text{sn}\,A}$; послѣ чего получимъ

$$b=2\,R\,.\,\text{sn}\,B=\frac{a}{\text{sn}\,A}\cdot\text{sn}\,B \quad \text{и} \quad c=2\,R\,.\,\text{sn}\,C=\frac{a}{\text{sn}\,A}\cdot\text{sn}\,C.$$

Для площади имѣемъ изъ предыдущаго параграфа:

$$S=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\text{sn}\,B\,.\,\text{sn}\,C}{\text{sn}\,(B+C)}.$$

Числовой примѣръ: $a=253$; $B=38°50'48''$; $C=23°42'$.

Вычисленіе A.	Вычисленіе $\lg 2R$.
$B=38°50'48''$	$\lg a=2{,}40312$
$C=23°42'$	$-\ \lg\,\text{sn}\,A$ ***) $=9{,}94812-10$
$B+C=62°32'48''$	$\lg 2R=2{,}45500$
$A=117°27'12''$	

---

*) По § 116 (теор. и слѣдств.) имѣемъ $b=2R\,.\,\text{sn}B=\frac{a}{\text{sn}A}\cdot\text{sn}\,B$.

**) Мнемоническое замѣчаніе: *углы B и C прилежатъ* къ сторонѣ a.

***) Такъ какъ уголъ A тупой, то вмѣсто $\text{sn}\,A$ беремъ $\text{sn}\,(180°-A)$, т.-е. $\text{sn}\,(B+C)$.

Вычисленіе b.	Вычисленіе c.
$+\ \lg 2R = 2,45500$	$+\ \lg 2R = 2,45500$
$\lg \operatorname{sn} B = 9,79743-10$	$\lg \operatorname{sn} C = 9,60417-10$
$\lg b = 2,25243$	$\lg c = 2,05917$
$b = 178,825$	$c = 114,597$

Для площади найдемъ $S = 9092,6$.

Замѣчаніе. Если требуется b и c выразить только съ помощью данныхъ, то надо въ полученныхъ выше формулахъ замѣнить $\operatorname{sn} A$ черезъ $\operatorname{sn}(B+C)$.

126*. ***2-й случай.*** *Даны двѣ стороны и уголъ между ними* (b, c, A).

Рѣшеніе. Опредѣлимъ сначала углы B и C по ихъ *полусуммѣ* и *полуразности:* 1) полусумму найдемъ, вычтя A изъ $180°$ и взявъ половину остатка; 2) для нахожденія полуразности примѣнимъ *теорему тангенсовъ* (§ 118); 3) зная полусумму и полуразность угловъ, находимъ и самые углы — чрезъ сложеніе и вычитаніе полученныхъ результатовъ.

Когда будутъ извѣстны B и C, то a опредѣлится по формулѣ $a = \frac{b}{\operatorname{sn} B} \cdot \operatorname{sn} A$. Для S имѣемъ въ § 124: $S = \frac{1}{2} bc . \operatorname{sn} A$.

Числовой примѣръ: $b = 1123$; $c = 2034$; $A = 72° 15' 19''$.

Вычисленіе угловъ B и C.

$$\frac{C+B}{2} = \frac{180° - A}{2}; \qquad \operatorname{tg}\frac{C-B}{2} = \frac{c-b}{c+b} . \operatorname{tg}\frac{C+B}{2}$$

$$\begin{array}{rl} A = & 72°15'19'' \\ 180° - A = & 107°44'41'' \\ \hline \frac{C+B}{2} = & 53°52'21'' \\ \pm\ \frac{C-B}{2} = & 21°34'13'' \\ \hline C = & 75°26'34'' \\ B = & 32°18'8'' \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} c = 2034 & c - b = 911 \\ b = 1123 & c + b = 3157 \\ \hline \multicolumn{2}{r}{-\ \lg(c-b) = 2,95952} \\ \multicolumn{2}{r}{\lg(c+b) = 3,49927} \\ \hline \multicolumn{2}{r}{+\ \ 9,46025-10} \\ \multicolumn{2}{r}{\lg \operatorname{tg}\frac{C+B}{2} = 0,13671} \\ \hline \multicolumn{2}{r}{\lg \operatorname{tg}\frac{C-B}{2} = 9,59696-10} \end{array}$$

(продолженіе на слѣд. стр.)

$[b=1123,\quad c=2034,\quad A=72°15'19'',\quad B=32°18'8'']$

Вычисленіе $a=\frac{b\,.\,\text{sn}\,A}{\text{sn}\,B}$.

$$\lg b=3{,}05038$$
$$\lg\text{sn}\,A=9{,}97883-10$$
$$3{,}02921$$
$$\lg\text{sn}\,B=9{,}72786-10$$
$$\lg a=3{,}30135$$
$$a=2001{,}48$$

Вычисленіе $S=b\,.\,\text{sn}A\cdot\frac{c}{2}$.

$$+\ \lg(b\,.\,\text{sn}\,A)=3{,}02921\text{*)}$$
$$\lg\frac{c}{2}=3{,}00732$$
$$\lg S=6{,}03653$$
$$S=1087750.$$

Замѣчаніе 1. Не лишнее будетъ указать, что сложеніе угловъ C, B и A не можетъ служить повѣркой вычисленія (точнѣе говоря, не можетъ обнаружить ошибки въ опредѣленіи $\frac{C-B}{2}$); а именьо: углы C и B опредѣлены подъ условіемъ, что $\frac{C+B}{2}=\frac{180°-A}{2}$; поэтому сложеніе C, B и A равносильно сложенію $180°-A$ и A, слѣдовательно *всегда* даетъ 180°.

Замѣчаніе 2. Въ предыдущемъ указанъ только способъ удобный для вычисленія. Если же требуется выразить искомыя величины съ помощью данныхъ, то будемъ имѣть:

1) $a=\sqrt{b^2+c^2-2\,bc\,.\,\text{cs}\,A}$ (§ 120); далѣе, изъ пропорцій $\frac{\text{sn}\,B}{\text{sn}\,A}=\frac{b}{a}$ и $\frac{\text{sn}\,C}{\text{sn}\,A}=\frac{c}{a}$ получимъ: 2) $\text{sn}\,B=\frac{b\,.\,\text{sn}A}{a}$ и 3) $\text{sn}\,C=\frac{c\,.\,\text{sn}\,A}{a}$, при чемъ здѣсь a надо замѣнить предыдущимъ выраженіемъ; 4) для S останется прежняя формула $S=\frac{1}{2}bc\,.\,\text{sn}\,A$.

127. ***3-й случай.*** *Даны двѣ стороны и уголъ, противолежащій одной изъ нихъ* (a, b, A).

Рѣшеніе. Изъ пропорціи $\frac{\text{sn}\,B}{\text{sn}\,A}=\frac{b}{a}$ получимъ $\text{sn}\,B=\frac{b\,.\,\text{sn}\,A}{a}$, съ помощью чего найдемъ уголъ B; далѣе будемъ имѣть:

$$C=180°-(A+B),\quad c=\frac{a}{\text{sn}\,A}\cdot\text{sn}\,C\quad\text{и}\quad S=\frac{ab}{2}\cdot\text{sn}\,C.$$

---

*) Взято изъ вычисленія a.

Обратимъ вниманіе на вычисленіе угла B. Здѣсь мы должны опредѣлить по *синусу* такой уголъ, который принадлежитъ *косоугольному* треугольнику и слѣдов. имѣетъ величину между 0 и 180°; а въ этихъ границахъ синусъ (не равный единицѣ) даетъ *два* угла: острый и дополнительный тупой; поэтому возникаетъ сомнѣніе, будутъ ли пригодны оба угла или только одинъ изъ нихъ, и тогда какой именно. Этотъ вопросъ рѣшается уже *сравненіемъ сторонъ*, такъ какъ въ треугольникѣ *тупой* уголъ можетъ быть только противъ *большей* стороны[1]).

Въ виду сказаннаго будетъ полезно сначала изслѣдовать задачу по сравнительной величинѣ данныхъ сторонъ.

Изслѣдованіе. I. Случай $a > b$. При этомъ уголъ A, какъ лежащій противъ большей изъ извѣстныхъ сторонъ, можетъ быть и острый и тупой.

Разсмотримъ правую часть равенства $\operatorname{sn} B = \frac{b \,.\, \operatorname{sn} A}{a}$. Если $b < a$, то и подавно $b \,.\, \operatorname{sn} A < a$, а потому $\operatorname{sn} B < 1$; слѣдов., задача возможна всегда[2]), и $\operatorname{sn} B$ доставитъ два угла. Но здѣсь уголъ B долженъ быть только острый, такъ какъ онъ лежитъ противъ стороны, которая не есть большая.

II. Случай $a < b$. Тогда уголъ A долженъ быть острый, такъ какъ онъ лежитъ противъ стороны, которая менѣе другой.

Обращаясь къ выраженію $\operatorname{sn} B = \frac{b \,.\, \operatorname{sn} A}{a}$, замѣтимъ, что если $b > a$, то $b \,.\, \operatorname{sn} A$ либо болѣе a, либо равно a, либо менѣе a, — въ зависимости отъ угла A; поэтому разсмотримъ отдѣльно каждый случай.

---

[1]) Въ предыдущихъ задачахъ мы не встрѣчали подобнаго затрудненія — вслѣдствіе того, что въ нихъ опредѣляемый уголъ, по свойству самой фигуры, могъ быть только *острый* (таковы напримѣръ: уголъ A въ § 96, уголъ $\frac{C - B}{2}$ въ § 126 и т. д.); исключеніемъ служитъ лишь уголъ $2A$ въ § 99, но и тамъ вопросъ былъ рѣшенъ сравненіемъ *одних*ъ *угловъ*.

Теперь же намъ приходится принимать во вниманіе не только углы, но *и стороны*. Этотъ *новый характеръ изслѣдованія* и представляетъ *существенную особенность* разсматриваемаго случая.

[2]) Т.-е. при всякомъ значеніи угла A.

1) $b \, . \operatorname{sn} A > a$; тогда $\operatorname{sn} B > 1$ (или $\lg \operatorname{sn} A > 0$) и задача невозможна.

2) $b \, . \operatorname{sn} A = a$; тогда $\operatorname{sn} B = 1$ и треугольникъ оказывается прямоугольнымъ.

3) $b \, . \operatorname{sn} A < a$; тогда $\operatorname{sn} B < 1$ и получатся два угла. Въ настоящемъ случаѣ для *треугольника* надо принять не только острый уголъ, но и тупой, *такъ какъ сторона* b *болѣе* стороны a, а сторона c *не можетъ вліять* на выборъ угла B, потому что сама опредѣляется въ зависимости отъ него.

Итакъ въ углѣ B теперь *равно возможны* два значенія: φ и $180° - \varphi$; соотвѣтственно этому получимъ также по два значенія для C, c и S*).

Для наглядности, результаты произведеннаго изслѣдованія помѣщаемъ въ видѣ таблицы[1]).

I	$a > b$ ($A < 90°$ или $A > 90°$)	$b \, . \operatorname{sn} A < a$	$B < 90°$
II	$a < b$ ($A < 90°$)	1) $b \, . \operatorname{sn} A > a$ 2) $b \, . \operatorname{sn} A = a$ 3) $b \, . \operatorname{sn} A < a$	Задача невозможна. $B = 90°$. $B_1 = \varphi$ и $B_2 = 180° - \varphi$ (два *неравныхъ* треугольника).

Теперь для случая $\lg \operatorname{sn} B < 0$ можно дать такое указаніе: если уголъ B лежитъ противъ меньшей[2]) стороны, то надо взять только острый уголъ; если же уголъ B лежитъ противъ большей стороны, то задача допускаетъ два рѣшенія.

---

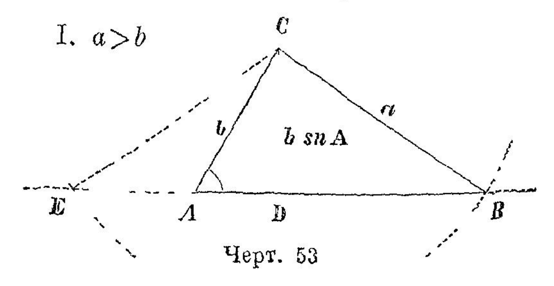
*) Что C_1 не равно C_2, это очевидно Для равенствъ $c_1 = c_2$ и $S_1 = S_2$ требуется, чтобы $\operatorname{sn} C_1 = \operatorname{sn} C_2$, или $C_1 + C_2 = 180°$, но этого нѣтъ ($C_1 + C_2 = 180° - 2A$)

[1]) Въ «Прибавленіяхъ» задача изслѣдована еще по сторонѣ c.

[2]) Изъ данныхъ

128. Для сравненія съ таблицей § 127 приводимъ еще соотвѣтствующія геометрическія построенія [1]).

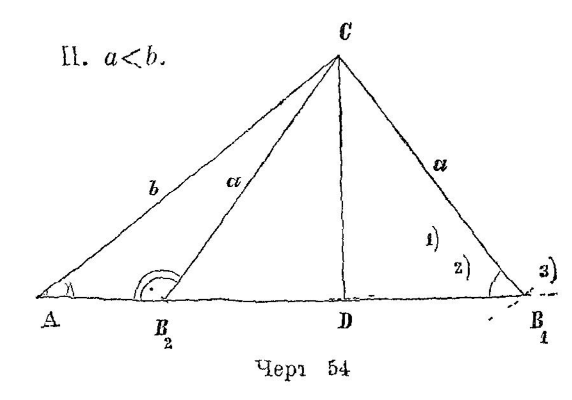
I. $a>b$



Черт. 53

Искомый треугольникъ есть ABC. [Треугольникъ CAE непригоденъ, потому что не содержитъ *даннаго* угла.]

II. $a<b$.



Черт 54

1) Задача невозможна.

2) Искомый тр-къ прямоугольный: ACD.

3) Два треугольника: ACB_1 и ACB_2 ($\angle AB_2C = 180° - CB_2B_1 = 180° - B_1$).

129*. Числовые примѣры. Приводимъ по одному примѣру на каждый изъ разсмотрѣнныхъ случаевъ указывая соотвѣтствующіе пункты изслѣдованія одинаковой нумераціей этихъ пунктовъ и примѣровъ.

Формулы, данныя въ началѣ § 127, мы для удобства вычисленія иногда будемъ измѣнять, а именно: при *полномъ* рѣшеніи треугольника удобнѣе sn B и c вычислять по формуламъ:

$$\text{sn}\, B = \frac{b}{2R} \text{ и } c = 2R \,.\, \text{sn}\, C, \text{ гдѣ } 2R = \frac{a}{\text{sn}\, A}.$$

Переходимъ теперь къ самымъ примѣрамъ.

---

[1]) Подробности мы опускаемъ, полагая, что учащемуся онѣ извѣстны изъ геометріи

$$\left[2R=\frac{a}{\operatorname{sn} A};\quad \operatorname{sn} B=\frac{b \cdot \operatorname{sn} A}{a}=\frac{b}{2R};\quad c=2R \cdot \operatorname{sn} C;\quad S=\frac{ab}{2}\cdot \operatorname{sn} C\right]$$

I. *Дано:* $a=700$; $b=650$; $A=40°25'$.

Вычисленіе B.

$$-\frac{\begin{array}{r}\lg a=2,84510\\ \lg \operatorname{sn} A=9,81180-10\end{array}}{\lg 2R=3,03330}$$

$$-\frac{\begin{array}{r}\lg b=2,81291\\ \lg 2R=3,03330\end{array}}{\lg \operatorname{sn} B=9,77961-10}$$

$$B=37°\,0'53''.$$

Вычисленіе C.

$$C=180°-77°\,25'53''=102°34'7''$$

Вычисленіе c.

$$+\frac{\begin{array}{r}\lg 2R=3,03330\\ \lg \operatorname{sn} C=9,98947-10\end{array}}{\lg c=3,02277}$$

$$c=1053,83$$

Для площади получимъ $S=222050$.

II. 2) *Дано:* $a=30$; $b=57$; $A=42°$.

Вычисленіе угла B.

$$+\frac{\begin{array}{r}\lg b=1,75587\\ \lg \operatorname{sn} A=9,82551-10\end{array}}{1,58138}$$

$$-\frac{\begin{array}{r}1,58138\\ \lg a=1,47712\end{array}}{\lg \operatorname{sn} B=0,10426;}$$ задача невозможна.

II. 2) *Дано:* $a=72$; $b=97$; $A=47°55'30''$.

Вычисленіе угла B.

$$+\frac{\begin{array}{r}\lg b=1,98677\\ \lg \operatorname{sn} A=9,87056-10\end{array}}{1,85733}$$

$$-\frac{\begin{array}{r}1,85733\\ \lg a=1,85733\end{array}}{\lg \operatorname{sn} B=0,00000}$$

Если полученный $\lg \operatorname{sn} B$ есть точный, то $B=90°$; если же онъ только приближенный, то уголъ B опредѣлится границами $89°44'$ и $90°16'$.

II. 3) *Дано:* $a=4$; $b=7$; $A=30°$.

Вычисленіе B.

$$-\frac{\begin{array}{r}\lg b=0,84510\\ \lg 2R^{*})=0,90309\end{array}}{\lg \operatorname{sn} B=9,94201-10}$$

$$B_1=61°2'43'';\quad B_2=118°57'17''$$

*) $2R=4:\operatorname{sn} 30°=8$.

Соотвѣтственно двумъ значеніямъ угла B получимъ далѣе

$C_1 \overset{*)}{=} B_2 - A = 88°57'17''$	$C_2 = B_1 - A = 31°2'43''$
$c_1 = 2R \,.\, \operatorname{sn} C_1 = 7{,}99867$	$c_2 = 2R \,.\, \operatorname{sn} C_2 = 4{,}12573$**)
$S_1 = \frac{ab}{2} \cdot \operatorname{sn} C_1 = 13{,}9977$	$S_2 = \frac{ab}{2} \cdot \operatorname{sn} C_2 = 7{,}22.$

130. ***4-й случай.*** *Даны три стороны* (a, b, c).

Рѣшеніе. Примѣняемъ формулы, выведенныя въ § 123:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{r}{p-a}; \quad \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{r}{p-b}; \quad \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{r}{p-c}$$

$$r = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c):p}.$$

Числовой примѣръ: $a=215$; $b=500$; $c=427$***).

	Вычисленіе $\lg r$.
$a=215$	$\lg(p-a)=2{,}55145$
$b=500$	$+\ \lg(p-b)=1{,}85126$
$c=427$	$\lg(p-c)=2{,}15836$
$2p=1142$	$6{,}56107$
$p=571$	$-\ \lg p=2{,}75664$
$p-a=356$	$3{,}80443$
$p-b=71$	$\lg r=1{,}90222$
$p-c=144$	

Вычисленіе A.	Вычисленіе B	Вычисленіе C.
$\lg r=1{,}90222$	$\lg r=1{,}90222$	$\lg r=1{,}90222$
$-\ \lg(p\text{-}a)=2{,}55145$	$-\ \lg(p\text{-}b)=1{,}85126$	$-\ \lg(p\text{-}c)=2{,}15836$
$\lg\operatorname{tg}\frac{A}{2}=9{,}35077-10$	$\lg\operatorname{tg}\frac{B}{2}=0{,}05096$	$\lg\operatorname{tg}\frac{C}{2}=9{,}74386-10$
$\frac{A}{2}=12°38'26''$	$\frac{B}{2}=48°21'14''$	$\frac{C}{2}=29°0'22''$
$A=25°16'52''$	$B=96°42'28''$	$C=58°0'44''$

(окончаніе на слѣд. стр.)

*) Такъ какъ $B_1 + B_2 = 180°$, то $C_1 = 180° - B_1 - A = B_2 - A$ и $C_2 = 180° - B_2 - A = B_1 - A$.

**) Для повѣрки можетъ служить равенство $\frac{1}{2}(c_1 + c_2) = b\,.\, \operatorname{cs} A$ [на черт. 54 видно, что $\frac{1}{2}(AB_1 + AB_2) = AD$].

***) Треугольникъ *возможенъ*, потому что большая сторона менѣе суммы двухъ другихъ.

Такъ какъ углы A, B и C найдены *независимо* одинъ отъ другого, то сложеніе ихъ можетъ служить повѣркой вычисленія.

При этомъ сумма иногда немного отличается отъ 180°—вслѣдствіе того, что вычисленіе только приближенное: такъ въ нашемъ примѣрѣ получимъ не 180°, а 180°0′4″.

Что касается площади, то она опредѣлится по формулѣ

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Пользуясь *произведеннымъ* уже вычисленіемъ, найдемъ

$$\lg S = \tfrac{1}{2}(6{,}56107 + 2{,}75664) = 4{,}65886; \quad \text{отсюда} \quad S = 45589.$$

Но если имѣются готовые $\lg p$ и $\lg r$ (какъ въ нашемъ вычисленіи), то еще проще взять $S = p.r$ (см. § 123); тогда получимъ $\lg S = 2{,}75664 + 1{,}90222 = 4{,}65886$.

Замѣчаніе 1. При *вычисленіи* угловъ треугольника по тремъ сторонамъ формулы § 123 имѣютъ то преимущество, что по нимъ вычисленіе проще, чѣмъ по другимъ формуламъ, и кромѣ того углы опредѣляются съ большей степенью точности (чѣмъ напр. по синусу или косинусу).

Замѣчаніе 2. Въ § 122 п. 1 было указано, что формулы

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \quad \text{и} \quad \cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

вообще неудобны для вычисленія; но можно пользоваться и ими, если дѣйствія въ числителѣ легко выполняются непосредственно. Пусть напримѣръ: $a=7$; $b=5$; $c=3$. Тогда будемъ имѣть:

$$\cos A = -\frac{1}{2}; \quad \cos B = \frac{11}{14}; \quad \cos C = \frac{13}{14}.$$

Отсюда: $A = 120°$; $B = 38°12'48''$; $C = 21°47'24''$.

Надо однако имѣть въ виду, что по косинусу углы опредѣляются менѣе точно: такъ, складывая A, B и C, получимъ 180°0′12″. (Вычисляя по тангенсамъ, мы нашли бы:

$$A = 120°, \quad B = 38°12'46'' \quad \text{и} \quad C = 21°47'12''*)$$

---

*) Значительная разница при вычисленіи угла C по косинусу и по тангенсу объясняется тѣмъ, что $\cos C$ близко къ единицѣ (ср. замѣч. къ § 96).

Нѣкоторые болѣе сложные случаи рѣшенія косоугольныхъ треугольниковъ.

131. ***Задача 1.*** *Даны сторона, противолежащій уголъ и отношеніе двухъ другихъ сторонъ* (a, A, $b:c=m:n$).

Рѣшеніе. Зная отношеніе неизвѣстныхъ сторонъ и уголъ между ними, можно найти два другіе угла: для этого положимъ $b=mx$ и $c=nx$ и примѣнимъ теорему тангенсовъ*).

Опредѣливъ B и C, поступаемъ какъ въ § 125.

132. ***Задача 2.*** *Опредѣлить углы треугольника, если дано отношеніе высотъ* $h_a:h_b:h_c=3:4:5$.

Рѣшеніе. Сперва найдемъ отношеніе сторонъ.

Имѣемъ: $a=\frac{2S}{h_a}$; $b=\frac{2S}{h_b}$ и $c=\frac{2S}{h_c}$; слѣдов.

$$a:b:c=\frac{1}{h_a}:\frac{1}{h_b}:\frac{1}{h_c}=\frac{1}{3}:\frac{1}{4}:\frac{1}{5};$$

отсюда $a:b:c=20:15:12$**).

Всѣ треугольники съ тѣмъ же отношеніемъ сторонъ *подобны* между собой, слѣдов. имѣютъ одинаковые углы; а потому для опредѣленія этихъ угловъ можно взять *любой* изъ такихъ треугольниковъ; для *вычисленія* проще всего взять тотъ изъ нихъ, гдѣ числами 20, 15 и 12 выражаются самыя стороны треугольника. Сдѣлавъ это и поступая, какъ показано въ § 130, получимъ

$$A=94^\circ 56' 24''; \quad B=48^\circ 21'; \quad C=36^\circ 42' 38''.$$

133. ***Задача 3.*** *Даны два угла и сумма противолежащихъ сторонъ* (A, B, $a+b=m$).

Рѣшеніе. Сперва по теоремѣ тангенсовъ опредѣлимъ разность $a-b$ (или $b-a$), а затѣмъ a и b. Далѣе какъ въ § 125.

Такъ же поступаемъ и въ случаѣ *разности* сторонъ.

134. ***Задача 4.*** *Даны сторона, противолежащій уголъ и сумма двухъ другихъ сторонъ* (a, A, $b+c=m$).

---

*) При этомъ x сократится, чѣмъ будетъ *тригонометрически* доказано, что углы B и C не зависятъ отъ *абсолютной* длины сторонъ b и c (иначе: данныя $b:c=m:n$ и A *достаточны* для опредѣленія *формы* тр-ка).

**) Треугольникъ *возможенъ*, такъ какъ бо́льшая сторона менѣе суммы двухъ другихъ.

Рѣшеніе. 1-й способъ. По § 116 имѣемъ $\frac{b+c}{a}=\frac{\operatorname{sn} B+\operatorname{sn} C}{\operatorname{sn} A}$.

Преобразуемъ вторую часть этого равенства:

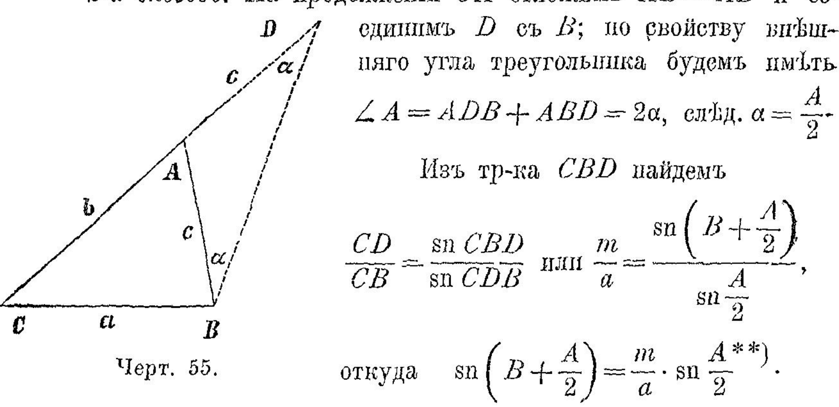
$$\frac{\operatorname{sn} B+\operatorname{sn} C}{\operatorname{sn} A}=\frac{2 \operatorname{sn}\frac{B+C}{2}\operatorname{cs}\frac{B-C}{2}}{\operatorname{sn} A}=\frac{2 \operatorname{cs}\frac{A}{2}\operatorname{cs}\frac{B-C}{2}}{2 \operatorname{sn}\frac{A}{2}\operatorname{cs}\frac{A}{2}}=\frac{\operatorname{cs}\frac{B-C}{2}}{\operatorname{sn}\frac{A}{2}}.$$

Такимъ образомъ $\frac{m}{a}=\frac{\operatorname{cs}\frac{B-C}{2}}{\operatorname{sn}\frac{A}{2}}$ *); отсюда $\operatorname{cs}\frac{B-C}{2}=\frac{m}{a}\cdot\operatorname{sn}\frac{A}{2}$.

Съ помощью этого равенства опредѣлимъ $\frac{B-C}{2}$; а зная кромѣ того $\frac{B+C}{2}\left(=\frac{180^\circ-A}{2}\right)$, найдемъ B и C.

Далѣе, зная $\frac{B+C}{2}$, $\frac{B-C}{2}$ и $b+c$, опредѣлимъ $b-c$ по теоремѣ тангенсовъ, послѣ чего найдемъ b и c.

2-й способъ. На продолженіи CA отложимъ $AD=AB$ и соединимъ D съ B; по свойству внѣшняго угла треугольника будемъ имѣть $\angle A=ADB+ABD=2\alpha$, слѣд. $\alpha=\frac{A}{2}$.



Черт. 55.

Изъ тр-ка CBD найдемъ

$$\frac{CD}{CB}=\frac{\operatorname{sn} CBD}{\operatorname{sn} CDB} \text{ или } \frac{m}{a}=\frac{\operatorname{sn}\left(B+\frac{A}{2}\right)}{\operatorname{sn}\frac{A}{2}},$$

откуда $\operatorname{sn}\left(B+\frac{A}{2}\right)=\frac{m}{a}\cdot\operatorname{sn}\frac{A}{2}$ **).

---

*) Это равенство извѣстно подъ именемъ *первой формулы Мольвейде.*

**) Сравнивая этотъ результатъ съ полученнымъ въ 1-мъ способѣ, видимъ, что $\operatorname{sn}\left(B+\frac{A}{2}\right)=\operatorname{cs}\frac{B-C}{2}$; предлагаемъ учащемуся подтвердить это равенство инымъ путемъ.

Опредѣливъ $B+\frac{A}{2}$, найдемъ B, а затѣмъ и C. Далѣе поступаемъ такъ же, какъ въ § 125.

Замѣчаніе. При первомъ способѣ, опредѣляя $\frac{B-C}{2}$ по косинусу, естественно взять *положительный* уголъ*), т.-е. считать $b>c$. Но въ такомъ предположеніи при второмъ способѣ, находя $B+\frac{A}{2}$ по синусу, надо будетъ взять *тупой* уголъ: дѣйствительно, если $B>C$, то $B+\frac{A}{2}>C+\frac{A}{2}$, а такъ какъ $\left(B+\frac{A}{2}\right)+\left(C+\frac{A}{2}\right)=180°$, то $B+\frac{A}{2}>90°$.

Предположеніе $B+\frac{A}{2}<90°$ соотвѣтствуетъ допущенію $b<c$ и слѣдов. *отрицательному* значенію угла $\frac{B-C}{2}$ при первомъ способѣ.

Такимъ образомъ, строго говоря, для искомыхъ *элементовъ* получимъ *два* ряда значеній; но нетрудно показать, что *треугольники* будутъ *равны* (ср. рѣшеніе той же задачи построеніемъ, а также §§ 99, 102, 104 и 145).

135. ***Задача 5.*** *Даны сторона, противолежащій уголъ и разность двухъ другихъ сторонъ* (a, A, $b-c=d$).

Рѣшеніе. Задача рѣшается подобно предыдущей. При алгебраическомъ способѣ получимъ $\frac{d}{a}=\frac{\sin\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$**); а при геометрическомъ способѣ $\frac{d}{a}=\frac{\sin(B-\varphi)}{\sin\varphi}$, гдѣ $\varphi=90°-\frac{A}{2}$.

136. ***Задача 6.*** *Даны сторона, прилежащій уголъ и сумма двухъ другихъ сторонъ* (a, B, $b+c=m$).

---

*) Напомнимъ, что если данному косинусу соотвѣтствуетъ уголъ α, то ему же соотвѣтствуетъ уголъ $-\alpha$.

**) Это есть такъ называемая *вторая формула Мольвейде.*

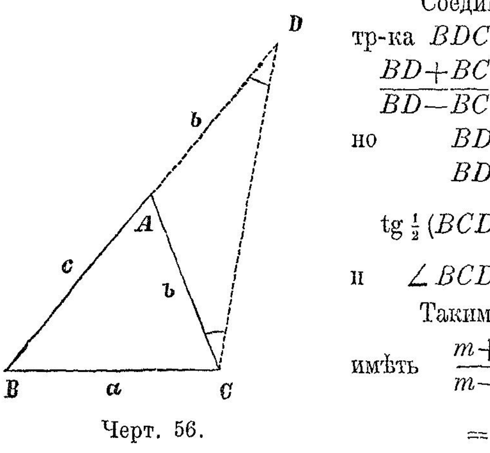
Рѣшеніе. 1-й способъ. Имѣемъ $m+a=b+c+a=2p$ и $m-a=b+c-a=2(p-a)$. Теперь *перемножимъ* формулы

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}\ ^{*});$$

получимъ $\operatorname{tg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{p-a}{p}$ или $\operatorname{tg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{m-a}{m+a}$;

съ помощью этого равенства можно опредѣлить неизвѣстный уголъ C, послѣ чего задача сведется къ § 125.

2-й способъ. Данный уголъ заключимъ между данной стороной и суммой неизвѣстныхъ сторонъ; для этого продолжимъ BA и отложимъ $AD=AC$.



Черт. 56.

Соединивъ точки D и C, изъ тр-ка BDC получимъ

$$\frac{BD+BC}{BD-BC}=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(BCD+BDC)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(BCD-BDC)}$$

но
$$BD+BC=m+a,$$
$$BD-BC=m-a,$$
$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(BCD+BDC)=\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\ ^{**})$$
и $\angle BCD-BDC=\angle C$.

Такимъ образомъ будемъ имѣть $\frac{m+a}{m-a}=\operatorname{ctg}\frac{B}{2}:\operatorname{tg}\frac{C}{2}=$

$$=\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{C}{2}.$$

137. Задача 7. *Даны сторона, прилежащій уголъ и разность двухъ другихъ сторонъ* (a, C, $b-c=d$).

Рѣшеніе. 1-й способъ. Имѣемъ $a+d=a+b-c=2(p-c)$ и $a-d=a-b+c=2(p-b)$. *Раздѣливъ* $\operatorname{tg}\frac{B}{2}$ на $\operatorname{tg}\frac{C}{2}$ (см. предыдущую задачу), получимъ

---

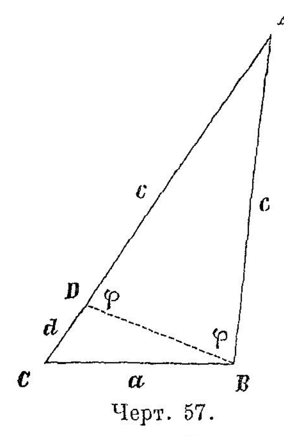
*) *Указаніе.* Должно взять углы противъ *неизвѣстныхъ* сторонъ.

**) См. § 115 п. 2.

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}:\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{p-c}{p-b} \quad \text{или} \quad \operatorname{tg}\frac{B}{2}:\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{a+d}{a-d};$$

съ помощью этого равенства опредѣлимъ неизвѣстный уголъ B.

2-й способъ. Заключимъ данный уголъ между данной стороной и разностью неизвѣстныхъ сторонъ, для чего отложимъ $AD=AB$. Точку D соединимъ съ B.



Черт. 57.

Изъ тр-ка CDB получимъ

$$\frac{a+d}{a-d}=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}[(180^\circ-\varphi)+(B-\varphi)]}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}[(180^\circ-\varphi)-(B-\varphi)]}=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(180^\circ-2\varphi+B)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(180^\circ-B)};$$

но $180^\circ-2\varphi=A$; такимъ образомъ будемъ имѣть

$$\frac{a+d}{a-d}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\left(90^\circ-\frac{B}{2}\right)}=\frac{\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{B}{2}}.$$

Замѣчаніе. Если дано a, B, $b-c=d$, т.-е. если данъ уголъ противъ *большей* изъ неизвѣстныхъ сторонъ, то рѣшеніе по первому способу останется прежнее, а по второму способу надо продолжить AB, отложить на полученномъ продолженіи $BE=d$*) и воспользоваться тр-комъ CBE.

138. *Задача 8. Даны два угла и периметръ* (A, B, $2p$).

Рѣшеніе. 1-й способъ. Находимъ $C=180^\circ-(A+B)$. Далѣе, по § 116 имѣемъ $2p=2R(\operatorname{sn}A+\operatorname{sn}B+\operatorname{sn}C)$ или, примѣняя формулу XXIX, $2p=2R\,.\,4\operatorname{cs}\frac{A}{2}\operatorname{cs}\frac{B}{2}\operatorname{cs}\frac{C}{2}$; отсюда

$$2R=\frac{p}{2}\,.\,\operatorname{sc}\frac{A}{2}\operatorname{sc}\frac{B}{2}\operatorname{sc}\frac{C}{2}.$$

Съ помощью этого выраженія опредѣлимъ стороны; напримѣръ

$$a=2R\,.\,\operatorname{sn}A=\frac{p}{2}\operatorname{sc}\frac{A}{2}\operatorname{sc}\frac{B}{2}\operatorname{sc}\frac{C}{2}\,.\,2\operatorname{sn}\frac{A}{2}\operatorname{cs}\frac{A}{2}{}^{**)}=p\operatorname{sn}\frac{A}{2}\operatorname{sc}\frac{B}{2}\operatorname{sc}\frac{C}{2};$$

---

*) Иначе: уголъ *смежный съ даннымъ* надо заключить между данной стороной и разностью неизвѣстныхъ сторонъ.

**) Примѣняя соотношеніе $\operatorname{sc}\frac{A}{2}.\operatorname{cs}\frac{A}{2}=1$.

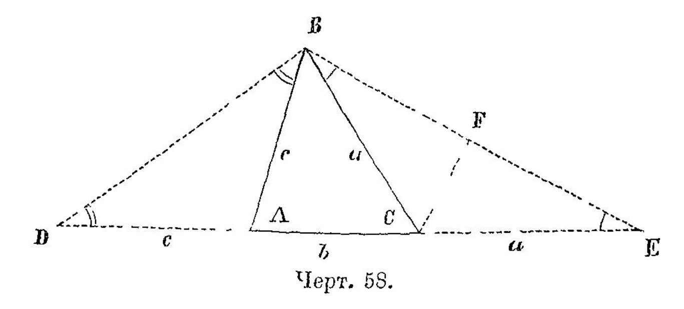
по аналогіи будемъ имѣть для двухъ другихъ сторонъ:

$$b = p\,\mathrm{sn}\frac{B}{2}\,\mathrm{sc}\frac{A}{2}\,\mathrm{sc}\frac{C}{2} \quad \text{и} \quad c = p\,\mathrm{sn}\frac{C}{2}\,\mathrm{sc}\frac{A}{2}\,\mathrm{sc}\frac{B}{2}.$$

Опредѣлимъ еще площадь. Имѣемъ $S = \frac{1}{2} bc \,.\, \mathrm{sn}\, A$; но по предыдущему $bc \overset{*)}{=} p^2 \cdot \mathrm{sc}^2\frac{A}{2} \cdot \mathrm{tg}\frac{B}{2} \cdot \mathrm{tg}\frac{C}{2}$, а $\mathrm{sn}\, A = 2\,\mathrm{sn}\frac{A}{2}\,\mathrm{cs}\frac{A}{2}$; слѣдовательно получимъ

$$S = p^2 \,.\, \mathrm{tg}\frac{A}{2}\,\mathrm{tg}\frac{B}{2}\,\mathrm{tg}\frac{C}{2}.$$

2-й способъ. На продолженіяхъ стороны AC отложимъ $CE = a$



Черт. 58.

и $AD = c$ и соединимъ точки D и E съ B; въ тр-кѣ DBE сторона $DE = 2p$, $\angle D = \frac{A}{2}$ и $\angle E = \frac{C}{2}$. Проведя $CF \perp BE$, найдемъ $a = FE : \mathrm{cs}\, E = \frac{BE}{2} : \mathrm{cs}\frac{C}{2} \cdots (1)$; BE опредѣлится изъ тр-ка DBE, а именно: по теоремѣ синусовъ $BE : 2p = \mathrm{sn}\, C : \mathrm{sn}\, DBE$; но $D = \frac{A}{2}$, а $\mathrm{sn}\, DBE = \mathrm{sn}\,(D+E) = \mathrm{sn}\left(\frac{A}{2} + \frac{C}{2}\right) = \mathrm{cs}\frac{B}{2}$; такимъ образомъ $BE : 2p = \mathrm{sn}\frac{A}{2} : \mathrm{cs}\frac{B}{2} \cdots (2)$. Отсюда опредѣляемъ BE и подставляемъ въ равенство (1).

Далѣе какъ въ первомъ способѣ.

3-й способъ. Если требуется произвести *вычисленіе*, то выгоднѣе пользоваться слѣдующими формулами, полученными на основаніи § 122:

---

*) Пользуемся тѣмъ, что $\mathrm{sn}\, a \cdot \mathrm{sc}\, a = \mathrm{tg}\, a$.

$$\frac{p-a}{p}=\operatorname{tg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2}\text{*)},\quad \frac{p-b}{p}=\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2};\quad \frac{p-c}{p}=\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2}.$$

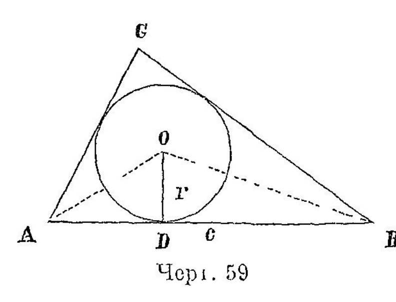
Отсюда напримѣръ $a=p-p\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$; такъ какъ p, $\frac{B}{2}$ и $\frac{C}{2}$ извѣстны, то для полученія a вычислимъ отдѣльно произведеніе $p\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$ и результатъ вычтемъ изъ p.

Для площади возьмемъ прежнюю формулу

$$S=p^2\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\text{**)}.$$

139. *Задача 9. Даны два угла и радіусъ вписаннаго круга* (A, B, r).

Рѣшеніе. 1-й способъ. Находимъ $C=180°-(A+B)$. Центръ вписаннаго круга соединимъ съ вершинами данныхъ угловъ и проведемъ радіусъ въ точку касанія прилежащей къ нимъ стороны.



Черт. 59

Для опредѣленія этой стороны удобно воспользоваться *двоякимъ выраженіемъ площади новаго тр-ка*; а именно площадь тр-ка AOB выразимъ 1) съ помощью основанія и высоты и 2) по формулѣ XXXVIII; получимъ

$$\frac{c}{2}\cdot r=\frac{c^2}{2}\cdot\frac{\operatorname{sn}\frac{1}{2}A\ \operatorname{sn}\frac{1}{2}B}{\operatorname{sn}(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)},$$

откуда $c=r\cdot\dfrac{\operatorname{sn}\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{sn}\frac{1}{2}A\ \operatorname{sn}\frac{1}{2}B}$ или $c=r\cdot\dfrac{\operatorname{cs}\frac{1}{2}C}{\operatorname{sn}\frac{1}{2}A\ \operatorname{sn}\frac{1}{2}B}$;

по аналогіи: $a=r\cdot\dfrac{\operatorname{cs}\frac{1}{2}A}{\operatorname{sn}\frac{1}{2}B\ \operatorname{sn}\frac{1}{2}C}$ и $b=r\cdot\dfrac{\operatorname{cs}\frac{1}{2}B}{\operatorname{sn}\frac{1}{2}A\ \operatorname{sn}\frac{1}{2}C}$.

---

*) См § 136, слѣдующія двѣ формулы составимъ по аналогіи.

**) Предлагаемъ учащемуся вывести эту формулу также изъ трехъ только что указанныхъ.

Опредѣлимъ площадь тр-ка ABC: имѣемъ $S=\frac{1}{2}ab \cdot \text{sn}\, C$; но $ab=r^2 \text{ctg}\frac{A}{2}\text{ctg}\frac{B}{2} : \text{sn}^2\frac{C}{2}$, а $\text{sn}\, C=2\,\text{sn}\frac{C}{2}\text{cs}\frac{C}{2}$; такимъ образомъ
$$S=r^2 \cdot \text{ctg}\frac{A}{2}\text{ctg}\frac{B}{2}\text{ctg}\frac{C}{2}.$$

2-й способъ. Если требуется произвести *вычисленіе*, то удобнѣе иной пріемъ. Пусть будутъ x, y и z отрѣзки сторонъ отъ вершинъ A, B и C до точекъ касанія (см. черт. 52); тогда
$$x=r \cdot \text{ctg}\frac{A}{2}, \quad y=r \cdot \text{ctg}\frac{B}{2} \quad \text{и} \quad z=r \cdot \text{ctg}\frac{C}{2}.$$

Вычисливъ отдѣльно x, y и z, будемъ имѣть: $a=y+z$, $b=x+z$ и $c=x+y$. Площадь опредѣлится по формулѣ
$$S=r \cdot p=r(x+y+z).$$

Замѣчаніе. Сравнивая выраженія S при томъ и другомъ способѣ, заключаемъ, что
$$\text{ctg}\frac{A}{2}+\text{ctg}\frac{B}{2}+\text{ctg}\frac{C}{2}=\text{ctg}\frac{A}{2}\text{ctg}\frac{B}{2}\text{ctg}\frac{C}{2}.$$

Предлагаемъ учащемуся вывести это соотношеніе изъ равенства $A+B+C=180°$.

140. ***Задача 10.*** *Даны высота и углы при основаніи* (h_c, A, B).

Рѣшеніе. При пользованіи чертежомъ мы должны были бы отдѣльно разобрать *два* случая: 1) h_c внутри треугольника и 2) h_c внѣ треугольника; удобнѣе поэтому не дѣлать чертежа, а воспользоваться формулами, *общность* которыхъ уже доказана.

Сначала опредѣлимъ c изъ двоякаго выраженія площади треугольника:
$$\frac{c}{2}\cdot h_c=\frac{c^2}{2}\cdot\frac{\text{sn}\, A \cdot \text{sn}\, B}{\text{sn}\,(A+B)}\text{*)}; \quad \text{отсюда} \quad c=h_c\cdot\frac{\text{sn}\,(A+B)}{\text{sn}\, A \cdot \text{sn} B}.$$
Далѣе, каковы бы ни были углы A и B, имѣемъ по § 121 $h_c=a \cdot \text{sn}\, B$ и $h_c=b \cdot \text{sn}\, A$; отсюда $a=\frac{h_c}{\text{sn}\, B}$ и $b=\frac{h_c}{\text{sn}\, A}$.

Площадь опредѣлится по формулѣ $S=\frac{c}{2}\cdot h_c$.

---

*) См. замѣчаніе къ § 124.

141. *Задача 11. Даны двѣ стороны и площадь* (b, c, S).

Рѣшеніе. Изъ формулы $S=\frac{1}{2}\ bc\,.\,\text{sn}\,A$ слѣдуетъ $\text{sn}\,A=\frac{2S}{bc}$.

Задача невозможна, если $2S>bc$; уголъ A прямой, если $2\,S=bc$; наконецъ, уголъ A имѣетъ *два* значенія ($A_1=\varphi$ и $A_2=180^\circ-\varphi$), если $2\,S<bc$*) (сторона a не можетъ вліять на выборъ угла A, потому что сама зависитъ отъ него).

Опредѣливъ A, будемъ имѣть основной случай (b, c, A).

142. *Задача 12. Даны площадь, сумма двухъ сторонъ и уголъ между ними* (S, $b+c=m$, A).

Рѣшеніе. Имѣемъ $b+c=m$, а изъ формулы $S=\frac{1}{2}\,bc\,.\,\text{sn}\,A$ найдемъ $bc=\frac{2\,S}{\text{sn}\,A}$ такимъ образомъ b и c равны корнямъ уравненія

$$x^2-mx+\frac{2\,S}{\text{sn}\,A}=0.$$

Рѣшивъ это уравненіе, получимъ $x=\frac{m}{2}\pm\sqrt{\frac{m^2}{4}-\frac{2\,S}{\text{sn}\,A}}$; поступая теперь, какъ показано въ § 83, и полагая $\frac{8\,S}{m^2\,.\,\text{sn}\,A}=\text{sn}^2\,\varphi$, приведемъ корни уравненія къ виду

$$x_1=m\,.\,\text{cs}^2\,\frac{\varphi}{2} \quad \text{и} \quad x_2=m\,.\,\text{sn}^2\,\frac{\varphi}{2}.$$

Одинъ изъ этихъ корней принимаемъ за b, а другой за c.

Далѣе будемъ имѣть основной случай (b, c, A).

Замѣчаніе. Сторону a нетрудно также выразить съ помощью данныхъ. Имѣемъ $a^2=b^2+c^2-2\,bc\,.\,\text{cs}\,A$; придавая ко второй части этого равенства разность $2\,bc-2\,bc$, получимъ

$a^2=(b+c)^2-2\,bc\,(1+\text{cs}\,A)=(b+c)^2-4\,bc\ .\ \text{cs}^2\,\frac{A}{2}$; подставляя сюда $b+c=m$ и $bc=\frac{2\,S}{\text{sn}\,A}$, будемъ имѣть въ окончательномъ видѣ

$$a=\sqrt{m^2-4\,S\,.\,\text{ctg}\,\frac{A}{2}}.$$

---

*) Предлагаемъ учащемуся иллюстрировать эту двойственность *геометрически.*

143. Задача 13. *Даны высота, боковая сторона и противолежащій ей уголъ* (h_a, b, B).

Рѣшеніе. По § 121 имѣемъ $h_a = b \,.\, \text{sn}\, C$, откуда $\text{sn}\, C = \frac{h_a}{b}$. Такъ какъ $h_a < b$*), то $\text{sn}\, C < 1$ и представляется вопросъ, имѣетъ ли *въ треугольникѣ* уголъ C два значенія (φ и $180° - \varphi$) или только одно изъ нихъ. Для этого обратимъ вниманіе еще на стороны c и a: сторона c опредѣлится независимо отъ C (изъ уравненія $h_a = c \,.\, \text{sn}\, B$) и потому имѣетъ вліяніе на выборъ этого угла; а сторона a сама опредѣлится по нему

$$\left[a = \frac{b}{\text{sn}\, B} \cdot \text{sn}\, A = \frac{b}{\text{sn}\, B} \cdot \text{sn}\,(B + C)\right];$$

слѣдовательно вопросъ рѣшается только сравненіемъ сторонъ $c\left(= \frac{h_a}{\text{sn}\, B}\right)$ и b. Такимъ образомъ изслѣдованіе сходно съ тѣмъ, какое содержится въ § 127.

Пусть напр. $\frac{h_a}{\text{sn}\, B} > b$**); тогда задача допускаетъ слѣдующія *два* рѣшенія***).

$h_a,\ b,\ B$	$c = \frac{h_a}{\text{sn}\, B}$	$C_1 = \varphi$	$A_1 = 180° - (B + \varphi)$	$a_1 = \frac{b}{\text{sn}\, B} \cdot \text{sn}\, A_1$
		$C_2 = 180° - \varphi$	$A_2 = \varphi - B$	$a_2 = \frac{b}{\text{sn}\, B} \cdot \text{sn}\, A_2$

Для площади получимъ $S_1 = \frac{a_1}{2} \cdot h_a$ и $S_2 = \frac{a_2}{2} \cdot h_a$.

144. Задача 14. *Даны двѣ стороны и равнодѣлящая угла между ними* (b, c, l).

Рѣшеніе. Выразимъ, что площадь треугольника равна суммѣ частей, на которыя дѣлитъ ее прямая l; получимъ

$$\frac{bc}{2} \cdot \text{sn}\, A = \frac{bl}{2} \cdot \text{sn}\frac{A}{2} + \frac{cl}{2} \cdot \text{sn}\frac{A}{2}$$

---

*) Предполагаемъ, что задача возможна и h_a не равно b.

**) При этомъ необходимо $B < 90°$

***) Предлагаемъ учащемуся иллюстрировать ихъ *геометрически*.

или $bc \,.\, \operatorname{sn} A = (b+c)\, l \,.\, \operatorname{sn}\frac{A}{2}$. Представивъ теперь полученное уравненіе въ видѣ

$$bc \,.\, 2\operatorname{sn}\frac{A}{2}\operatorname{cs}\frac{A}{2} = (b+c)\, l \,.\, \operatorname{sn}\frac{A}{2},$$

найдемъ, что корни его суть

$$1)\ \operatorname{sn}\frac{A}{2} = 0 \quad \text{и} \quad 2)\ \operatorname{cs}\frac{A}{2} = \frac{(b+c)\, l}{2\, bc}.$$

Первый корень непригоденъ для *задачи*, а второй доставитъ отвѣтъ, если только $(b+c)\, l < 2\, bc$*).

Опредѣливъ A, придемъ къ основному случаю $(b,\ c,\ A)$.

145. ***Задача 15.*** *Даны основаніе, высота и уголъ при вершинѣ* $(b,\ h_b,\ B)$.

Рѣшеніе. Имѣемъ $h_b = a \,.\, \operatorname{sn} C$ и $a = \frac{b}{\operatorname{sn} B} \cdot \operatorname{sn} A$;

слѣдов. $h_b = b \cdot \frac{\operatorname{sn} A \,.\, \operatorname{sn} C}{\operatorname{sn} B}$; отсюда $\operatorname{sn} A \,.\, \operatorname{sn} C = \frac{h}{b} \,.\, \operatorname{sn} B \ldots (1)$; углы A и C связаны еще уравненіемъ $A + C = 180^\circ - B \ldots (2)$; такимъ образомъ приходимъ къ рѣшенію тригонометрической системы уравненій. Замѣтимъ, что

$2\operatorname{sn} A \,.\, \operatorname{sn} C = \operatorname{cs}(A - C) - \operatorname{cs}(A + C)$ и $\operatorname{cs}(A + C) = -\operatorname{cs} B$; слѣдовательно

$$2\operatorname{sn} A \,.\, \operatorname{sn} C = \operatorname{cs}(A - C) + \operatorname{cs} B.$$

Съ помощью этого преобразованія и уравненія (1) получимъ

$$\operatorname{cs}(A - C) = \frac{2h}{b} \cdot \operatorname{sn} B - \operatorname{cs} B,$$

а полагая $\frac{2h}{b} = \operatorname{ctg}\varphi$, приведемъ это равенство къ виду

$$\operatorname{cs}(A - C) = \frac{\operatorname{sn}(B - \varphi)}{\operatorname{sn}\varphi}.$$

Теперь, опредѣливъ сначала φ, найдемъ затѣмъ $A - C$, послѣ чего будемъ имѣть извѣстными $A - C$ и $A + C$.

---

*) $\operatorname{cs}\frac{A}{2} = 1$ будетъ непригодно для *задачи*.

Стороны a и c опредѣлятся изъ уравненій

$$h_b = a \,.\, \mathrm{sn}\, C \quad \text{и} \quad h_b = c \,.\, \mathrm{sn}\, A.$$

Числовой примѣръ. Положимъ $b = 10$, $h_b = 5$ и $B = 25°$. Тогда $\mathrm{ctg}\, \varphi = \frac{2h}{b} = 1$, слѣдовательно $\varphi = 45°$.

Послѣ этого будемъ имѣть

$$\mathrm{cs}\,(A - C) = \frac{\mathrm{sn}\,(25° - 45°)}{\mathrm{sn}\, 45°} = \frac{\mathrm{sn}\,(-20°)}{\mathrm{sn}\, 45°} = -\frac{\mathrm{sn}\, 20°}{\mathrm{sn}\, 45°}.$$

Означимъ черезъ α табличный уголъ, котораго косинусъ равенъ $\frac{\mathrm{sn}\, 20°}{\mathrm{sn}\, 45°}$; тогда $A - C = \pm(180° - \alpha)$.

Вычисляя α, получимъ $61°\, 4'\, 26''$; слѣдовательно будемъ имѣть:

во-первыхъ	во-вторыхъ
$A - C = 118°\, 55'\, 34''$	$A - C = -118°\, 55'\, 34''$
$A + C = 155°$	$A + C = 155°$
$A = 136°\, 57'\, 47''$	$A = 18°\, 2'\, 13''$
$C = 18°\, 2'\, 13''$	$C = 136°\, 57'\, 47''$.

(При *построеніи* этому соотвѣтствуетъ *двоякое* положеніе искомой вершины на дугѣ, вмѣщающей данный уголъ).

Треугольники получаются *равные*.

ОБЪ ИЗМѢРЕНІЯХЪ НА МѢСТНОСТИ.

XI. Измѣреніе линій и угловъ на земной поверхности. Простѣйшіе угломѣрные инструменты.

146. Общее замѣчаніе. При составленіи землемѣрныхъ плановъ, а также и въ нѣкоторыхъ другихъ случаяхъ, приходится опредѣлять величину линій и угловъ, назначаемыхъ на *мѣстности*. Эту величину находятъ или непосредственнымъ измѣреніемъ — съ помощью особыхъ приборовъ, или же посредствомъ вычисленія — по тѣмъ даннымъ, какія получены уже ранѣе; въ послѣднемъ случаѣ требуется примѣненіе тригонометріи.

Дать понятіе о томъ и другомъ способѣ и составляетъ цѣль предстоящаго изложенія.

147. Измѣреніе линій. Прямая линія на мѣстности указывается какими-нибудь хорошо замѣтными предметами, помѣщенными на ея концахъ. Если длина измѣряемой линіи значительна, то ее надо сначала *провѣшить*, т.-е. поставить рядъ *вѣхъ*[1]) по ея направленію.

Для непосредственнаго измѣренія линій на мѣстности наиболѣе употребительны *землемѣрная цѣпь* и *мѣрительная лента.*

Цѣпь дѣлается изъ негибкой желѣзной проволоки. Она имѣетъ длину 10 саж. и состоитъ изъ 100 прямыхъ звеньевъ, соединенныхъ промежуточными кольцами; разстояніе между центрами двухъ послѣдовательныхъ колецъ равно 0,1 саж.*).

---

[1]) Вѣха — длинный колъ со значкомъ.

*) Существуютъ также цѣпи, составленныя изъ 70 футовъ.

Мѣрительная лента изготовляется изъ тонкой стальной полосы. Она имѣетъ длину также 10 саж. и размѣчена на десятыя доли сажени.

При пользованіи цѣпью и мѣрительной лентой длина линіи выражается въ саженяхъ и десятыхъ доляхъ сажени.

Не касаясь здѣсь практическихъ пріемовъ измѣренія, упомянемъ еще о степени его точности. — Принято считать, что ошибка при измѣреніи цѣпью не превышаетъ 1 саж. на 500 саж., а точность измѣренія стальной лентой вдвое болѣе. Для большей надежности результата линію измѣряютъ не одинъ разъ, а нѣсколько разъ, и берутъ среднее ариѳметическое изъ полученныхъ чиселъ.

148. Измѣреніе угловъ. Измѣреніе угловъ на мѣстности бываетъ двоякое: или 1) уголъ получаютъ *графически*, т.-е. между двумя линіями на бумагѣ, или же 2) опредѣляютъ *градусную величину* угла.

Мы разсмотримъ только второй способъ, какъ имѣющій отношеніе къ тригонометріи.

149. Угломѣрные инструменты. Инструменты, служащіе для опредѣленія *градусной величины* угла, называются *угломѣрными*.

Одни изъ нихъ служатъ для опредѣленія угла только въ горизонтальной плоскости, другіе же измѣряютъ уголъ и въ горизонтальной и въ вертикальной плоскости. (Углы въ наклонной плоскости опредѣляются обыкновенно съ помощью *вычисленія*).

Простѣйшіе угломѣрные инструменты суть *буссоль* и *астролябія*.

150. Чтобы легче было понять ихъ устройство, укажемъ сначала ***составныя части угломѣрнаго инструмента вообще.***

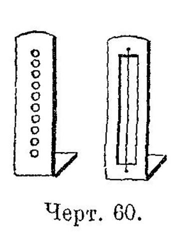
Главныя части суть *лимбъ* и *алидада*.

Лимбомъ называется кругъ, раздѣленный на градусы; при измѣреніи угла лимбъ устанавливается въ плоскости этого угла, центромъ въ его вершинѣ.

Алидадой называется линейка, которая вращается въ плоскости лимба около его центра; при измѣреніи угла она направляется по его сторонѣ, — *наводится* на какой-либо предметъ на этой сторонѣ.

Для наведенія алидады, — для *визированія*, — къ ней придѣлываются особые приборы, называемые *визирными;* простѣйшій изъ

нихъ — *діоптры*. Они изображены отдѣльно на черт. 60; это двѣ пластинки съ прорѣзами, прикрѣпляемыя на концахъ алидады перпендикулярно къ ней. Одинъ діоптръ имѣетъ рядъ небольшихъ круглыхъ отверстій [1]), а въ другомъ вырѣзана широкая полоса, и въ серединѣ ея натянутъ черный конскій волосъ. Центры круглыхъ отверстій и волосокъ должны находиться въ одной плоскости; она называется *коллимаціонной;* эта плоскость должна быть перпендикулярна къ плоскости лимба и проходить черезъ его центръ; ея пересѣченія съ краями алидады отмѣчаются на этихъ краяхъ особыми штрихами.



Черт. 60.

При визированіи на какую-либо точку ставятъ алидаду такъ, чтобы для глаза, смотрящаго въ діоптръ съ круглыми отверстіями, точка была закрыта волоскомъ другого діоптра.

Угломѣрный инструментъ помѣщается обыкновенно на раздвижномъ треножникѣ; но между треножникомъ и инструментомъ вводится еще снарядъ, позволяющій склонять плоскость лимба такъ или иначе. Простѣйшее изъ такихъ приспособленій есть *бакса:* это особаго рода сферическія клещи, охватывающія шаръ, которымъ внизу оканчивается ось лимба; такимъ образомъ лимбъ можетъ вращаться около оси, а самая ось мѣнять свое направленіе.

Для установки лимба въ горизонтальной плоскости служитъ *уровень*, а въ вертикальной плоскости — *отвѣсъ* [2]).

Для установки лимба центромъ надъ вершиною измѣряемаго угла служитъ отвѣсъ съ заостренной гирькой.

Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію буссоли и астролябіи.

151. Буссоль служитъ для измѣренія *горизонтальныхъ* угловъ и основана на свойствѣ *магнитной стрѣлки* принимать одно и то же опредѣленное положеніе.

Приборъ состоитъ изъ цилиндрической коробки, внутри которой закрѣплено плоское градусное кольцо, а надъ нимъ, — на остріѣ, — помѣщена магнитная стрѣлка, служащая какъ бы его

---

[1]) Вмѣсто нихъ дѣлаютъ также сплошной узкій прорѣзъ.

[2]) Если инструментъ имѣетъ баксу, то лимбъ можетъ держаться и въ наклонной плоскости; но такую установку приходится дѣлать *глазомѣрно* и потому ей почти не пользуются.

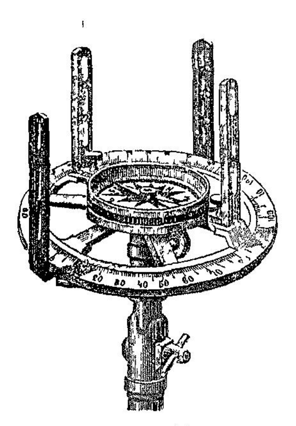
діаметромъ. Для визированія придѣлываютъ діоптры къ самой коробкѣ, или же она утверждается на алидадѣ; коллимаціонная плоскость діоптровъ проводится черезъ діаметръ кольца, при чемъ этотъ діаметръ принимаютъ за нулевой.

При повертываніи коробки около ея оси магнитная стрѣлка сохраняетъ свое направленіе, а градусныя дѣленія кольца одно за другимъ проходятъ подъ стрѣлкой.

Измѣреніе буссолью сводится къ слѣдующему: поставивъ инструментъ въ вершинѣ угла, визируютъ по его сторонѣ и замѣчаютъ, противъ какого дѣленія кольца приходится сѣверный конецъ стрѣлки; то же самое повторяютъ для второй стороны угла; по этимъ двумъ наблюденіямъ и опредѣляютъ уголъ[1]).

Наибольшая точность измѣренія угловъ буссолью—до 15′.

152. Астролябія состоитъ изъ лимба, алидады и двухъ паръ діоптровъ (см. черт. 61). Два діоптра прикрѣплены къ лимбу на концахъ его нулевого діаметра; они называются *неподвижными*. Другіе два помѣщаются на концахъ алидады и называются *подвижными;* при нихъ находятся *верньеры*.



Черт. 61.

Лимбъ дѣлится на градусы и даже полуградусы; верньеры показываютъ 5′. Коллимаціонная плоскость неподвижныхъ діоптровъ проходитъ черезъ нулевой діаметръ лимба; коллимаціонная плоскость подвижныхъ діоптровъ — черезъ нули обоихъ верньеровъ.

Для оріентированія линій относительно странъ свѣта къ астролябіи присоединяется еще магнитная стрѣлка.

153. Чтобы измѣрить *горизонтальный уголъ* (или проекцію угла на горизонтальную плоскость), сначала устанавливаютъ лимбъ горизонтально, центромъ надъ вершиной угла; затѣмъ, сохраняя

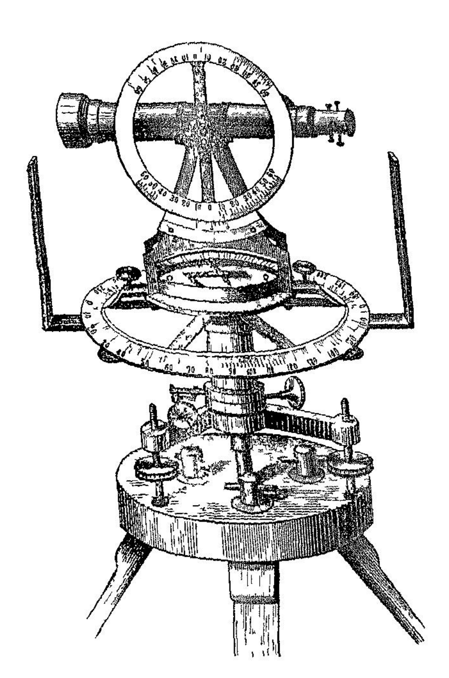
---

[1]) При этомъ способѣ *склоненіе* магнитной стрѣлки не оказываетъ вліянія, если только оно одинаково при обоихъ визированіяхъ.

горизонтальность лимба, повертываютъ его около центра, пока сквозь неподвижные діоптры не увидятъ какой-нибудь предметъ, находящійся на одной изъ сторонъ угла; не измѣняя теперь положенія лимба, ставятъ подвижные діоптры по направленію другой стороны угла; наконецъ дѣлаютъ отсчетъ по дугѣ лимба между діоптрами.

Точность измѣренія горизонтальнаго угла — около 5′.

154. Чтобы измѣрить уголъ между прямой линіей *AB* и горизонтальной плоскостью (***уголъ наклоненія*** прямой линіи), устанавливаютъ лимбъ въ вертикальной плоскости, проходящей черезъ данную линію, такъ, чтобы его центръ находился на данной линіи; затѣмъ, удерживая лимбъ въ той же плоскости, повертываютъ его около центра до тѣхъ поръ, пока діаметръ 90°—270° не станетъ по отвѣсу; коллимаціонная плоскость неподвижныхъ діоптровъ будетъ тогда горизонтальна; теперь, не измѣняя положенія лимба, направляютъ алидаду по линіи *AB* и отсчитываютъ дугу между діоптрами.



Черт 62 (къ § 155).

Точность этого измѣренія не болѣе какъ до 15′*).

155. Для болѣе точнаго визированія на отдаленные предметы¹)

*) Меньшая точность измѣренія въ случаѣ вертикальнаго угла объясняется менѣе точной установкой инструмента.

¹) Сквозь діоптры ихъ почти нельзя видѣть — по недостатку свѣта.

діоптры замѣняются *зрительной трубой* [1]), а для угловъ наклоненія присоединяется особый *вертикальный кругъ;* точность отсчитыванія въ этомъ случаѣ доводится (съ помощью верньеровъ) до 1. Одна изъ такихъ усовершенствованныхъ астролябій изображена на черт. 62; для большей устойчивости, она помѣщается не на баксѣ, а на подъемныхъ винтахъ

156. Въ случаяхъ, требующихъ *особой точности* измѣренія, пользуются *теодолитомъ.*

Теодолитъ отличается отъ астролябіи главнымъ образомъ большей плавностью движенія частей и большей устойчивостью.

Въ лучшихъ теодолитахъ точность отсчитыванія доходитъ до 10″ (лимбъ раздѣленъ на шестыя доли градуса, а на верньерахъ дуга въ 59 дѣленій лимба раздѣлена на 60 равныхъ частей).

[1]) Чтобы можно было визировать на *точку* предмета, внутри этой трубы устраивается *сѣтка* изъ паутинныхъ нитей, на которую и принимаютъ *дѣйствительное* изображеніе предмета.

XII. Приложеніе прямолинейной тригонометріи къ производству измѣреній на мѣстности.

157. Общее замѣчаніе. Мы разсмотримъ здѣсь только *простѣйшія* примѣненія тригонометріи, а именно: 1) опредѣленіе неприступныхъ*) разстояній, 2) опредѣленіе высотъ и 3) составленіе тріангуляціи. При этомъ мы ограничимся только случаемъ такой мѣстности, которая можетъ считаться горизонтальной плоскостью или по крайней мѣрѣ позволяетъ проводить по нѣкоторымъ направленіямъ горизонтальныя линіи.

Непосредственное измѣреніе *линій* на мѣстности представляетъ двоякую трудность: 1) затруднителенъ самый процессъ измѣренія и 2) если взятая линія не есть прямая, или если она не горизонтальна, то приходится дѣлать разнаго рода *поправочныя* измѣренія и вычисленія. *Углы* же измѣряются и легче, и несравненно точнѣе. Поэтому стараются измѣреніе линіи замѣнить, насколько возможно, измѣреніемъ угловъ; линіи же опредѣляютъ преимущественно посредствомъ *вычисленія*. Большею частію даже ограничиваются измѣреніемъ только *одной* линіи; ее называютъ тогда *базисомъ*[1]).

Сдѣланныя замѣчанія необходимо имѣть въ виду при рѣшеніи названныхъ выше задачъ, къ которымъ мы теперь и переходимъ.

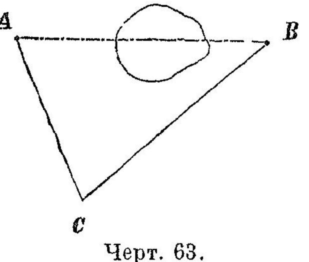
158. Опредѣленіе неприступныхъ разстояній. Здѣсь могутъ быть три случая: 1) обѣ конечныя точки доступны; 2) доступна только одна изъ конечныхъ точекъ и 3) обѣ конечныя точки недоступны.

Разсмотримъ каждый случай. Точки, между которыми опредѣляется разстояніе, означимъ черезъ A и B.

---

*) Т.-е. не допускающихъ *непосредственнаго* измѣренія.

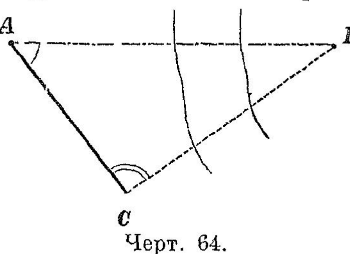
1-й случай. Точки A и B доступны. Рѣшеніе. a) Если точки A и B не видны одна изъ другой, то выбираютъ такую точку C, изъ которой были бы видны тѣ двѣ, и измѣряютъ уголъ ACB и линіи CA и CB; по этимъ даннымъ вычисляютъ разстояніе AB*).



Черт. 63.

b) Если же точки A и B видны одна изъ другой, то измѣряютъ линію AC и углы A и C; этихъ данныхъ достаточно для вычисленія AB**).

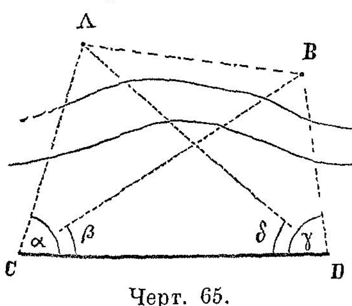
2-й случай. Точка A доступна, а точка B недоступна (т.-е. наблюдатель имѣетъ возможность подойти къ точкѣ A, а отъ точки B отдѣленъ какимъ-либо препятствіемъ).



Черт. 64.

Рѣшеніе. Взявъ точку C такъ, чтобы изъ нея были видны A и B, измѣряютъ углы A и C и базисъ AC. Линію AB тогда нетрудно вычислить, такъ какъ въ тр-кѣ ABC будутъ извѣстны сторона и два угла.

3-й случай. Точки A и B недоступны. Рѣшеніе. Выбравъ въ доступной мѣстности точки C и D такъ, чтобы изъ нихъ были видны A и B, измѣряютъ базисъ CD и углы α, β, γ и δ. Изъ двухъ треугольниковъ, содержащихъ CD, вычисляютъ CA и CB; уголъ между этими линіями равенъ $\alpha - \beta$; такимъ образомъ можно будетъ вычислить AB изъ тр-ка ACB.



Черт. 65.

---

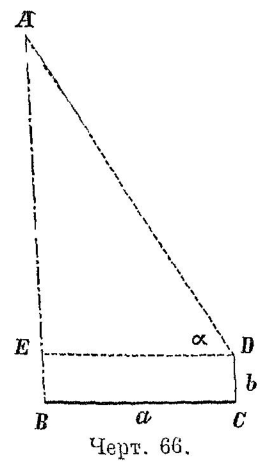
*) Съ цѣлью *повѣрки* принято искомыя линіи вычислять *двумя* различными способами: такъ въ настоящемъ случаѣ, вычисливъ углы A и B (§ 126), можно сторону c найти по формулѣ $c = \frac{a}{\operatorname{sn} A} \cdot \operatorname{sn} C$ и по формулѣ $c = \frac{b}{\operatorname{sn} B} \cdot \operatorname{sn} C$.

**) Для большей точности измѣряютъ также и уголъ B и сумму угловъ сравниваютъ съ 180°: если окажется разница, то ее разлагаютъ поровну на всѣ три угла.

Можно также начать вычисленіе съ линій DA и DB, заключающихъ уголъ $\gamma-\delta$, и опредѣлить AB изъ треугольника ADB. Этотъ второй способъ послужитъ для перваго повѣркой, которая особенно полезна въ настоящемъ случаѣ — въ виду сложности вычисленія.

159. Опредѣленіе высоты. Разберемъ главные случаи этой задачи.

1-й случай. Основаніе[1]) *доступно.* Положимъ напримѣръ, что измѣряемая высота есть AB (черт. 66), при чемъ точка B доступна.



Черт. 66.

Рѣшеніе. Изъ точки B проводятъ на мѣстности какую-нибудь *горизонтальную* линію BC *) и измѣряютъ ея длину; положимъ, что эта длина есть a.

Послѣ этого надъ точкой C ставятъ астролябію съ вертикальнымъ лимбомъ такъ, чтобы центръ лимба D былъ надъ самой точкой C, и опредѣляютъ *уголъ наклоненія* линіи DA — способомъ, объясненнымъ въ § 154; пусть будетъ этотъ уголъ равенъ α.

Измѣряютъ еще — по отвѣсу — разстояніе DC; положимъ, что получилось $DC=b$.

Зная a, α и b, будемъ имѣть для вычисленія высоты

$$AB=AE+EB=a\operatorname{tg}\alpha+b.$$

2-й случай. Основаніе недоступно. Пусть на черт. 67 высота AB представляетъ примѣръ такого случая. Предположимъ еще, что окружающая мѣстность горизонтальна.

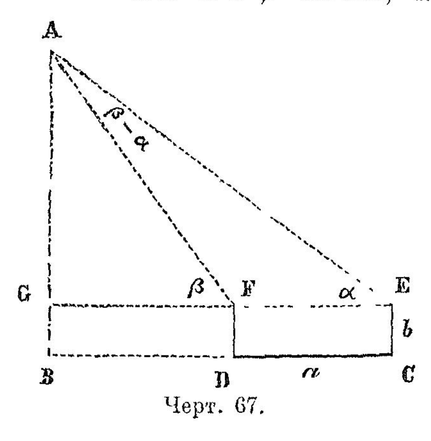
Рѣшеніе. Выбираютъ на мѣстности какую-нибудь достаточно удаленную точку C. Помѣщаютъ надъ этой точкой астро-

---

[1]) Т.-е. проекція вершины на ту горизонтальную плоскость, отъ которой считается высота.

*) Случай, когда мѣстность не допускаетъ такой линіи, мы не будемъ разсматривать.

лябію и, поставивъ лимбъ вертикально, измѣряють уголъ наклоненія линіей EA*). Затѣмъ, не измѣняя положенія лимба, съ помощью неподвижныхъ діоптровъ назначаютъ на мѣстности какую-нибудь линію CD по направленію плоскости лимба, а слѣдовательно въ одной плоскости съ AB. Эту линію измѣряютъ какъ базисъ. Наконецъ переносятъ въ точку D астролябію и, поставивъ ее на той же высотѣ, какъ въ точкѣ C, опредѣляютъ уголъ наклоненія линіи FA.



Черт. 67.

Послѣ сдѣланныхъ измѣреній нетрудно вычислить AB; пусть напримѣръ получилось: $CD=a$, $FD=EC=b$, $\angle AEG=\alpha$ и $\angle AFG=\beta$. Тогда $AB=AG+BG=AF\,.\,\mathrm{sn}\,\beta+b$; а изъ треугольника AFE найдемъ $AF=\frac{a}{\mathrm{sn}\,(\beta-\alpha)}\cdot\mathrm{sn}\,\alpha$; такимъ образомъ

$$AB=\frac{a\,.\,\mathrm{sn}\,\alpha\,.\,\mathrm{sn}\,\beta}{\mathrm{sn}\,(\beta-\alpha)}+b.$$

160. Тріангуляція. Производя съемку мѣстности, можно поступить такимъ образомъ: снять во всей подробности какой-либо небольшой участокъ, отъ него перейти къ смежному, отъ этого къ третьему и т. д., пока не снимемъ всю назначенную мѣстность; она будетъ при этомъ возникать на планѣ послѣдовательно, небольшими и сполна отдѣланными участками.

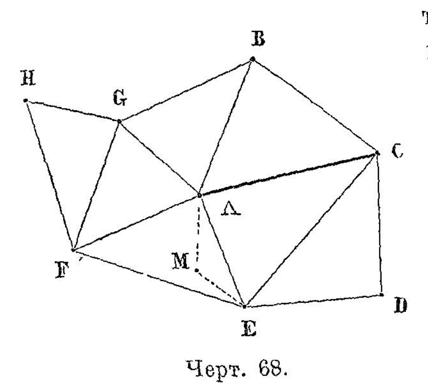
Но такой способъ неудобенъ, если снимаемое пространство значительно: при *послѣдовательной* съемкѣ погрѣшности въ измѣреніяхъ и вычисленіи *накопляются* и тѣмъ болѣе, чѣмъ далѣе уходимъ отъ основного участка. Поэтому въ такихъ случаяхъ съемку дѣлаютъ не послѣдовательно, а *переходя отъ общаго къ частному*, т.-е. сначала по *всей* мѣстности опредѣляютъ возможно точнѣе положеніе *немногихъ основныхъ* точекъ [1]) и уже съ ними

*) Черезъ E означенъ центръ лимба.

[1]) Наиболѣе выгодныхъ для съемки.

связываютъ разработку подробностей: тогда ошибки одного участка могутъ и не вліять на другой, если ихъ исходные пункты различны.

Пусть A, B, ..., G, H суть *главныя* точки мѣстности, т.-е. точки, служащія основаніемъ съемки. Соединивъ ихъ напримѣръ такъ, какъ показано на черт. 68, получимъ сѣть треугольниковъ[1]); она называется *тріангуляціей*[2]). Чтобы опредѣлить взаимное положеніе этихъ точекъ, измѣряютъ всѣ углы сѣти и одну изъ сторонъ, напримѣръ AC. Тогда сначала рѣшаютъ треугольникъ, содержащій базисъ, отъ этого треугольника переходятъ къ смежному и т. д.[3]); полученіе одной и той же стороны изъ двухъ треугольниковъ (напр. стороны AG изъ тр-ковъ ABG и AFG) служитъ повѣркой вычисленія.



Черт. 68.

Изъ сказаннаго ясно, что погрѣшность въ измѣреніи базиса отражается на всемъ послѣдующемъ вычисленіи; поэтому онъ долженъ быть измѣренъ со всей возможной точностью. Углы измѣряютъ также при помощи очень точныхъ инструментовъ (теодолитовъ).

Когда составлена уже тріангуляція, то, чтобы опредѣлить положеніе какой-либо новой точки, напримѣръ M, надо ее связать съ однимъ изъ звеньевъ тріангуляціи, напр. измѣрить углы MAE MEA. Линіи MA и ME въ свою очередь могутъ служить базисами для съемки еще болѣе мелкихъ подробностей; и т. д.

---

[1]) Стороны такихъ треугольниковъ иногда содержатъ по нѣскольку верстъ.

[2]) Названіе «тріангуляція» иногда прилагается и къ самому *способу* съемки.

[3]) Рѣшая треугольникъ каждый разъ по сторонѣ и тремъ угламъ.

ПРИБАВЛЕНІЯ.

Къ § 6. Обычное дѣленіе окружности на 360° и т. д. получило свое начало еще въ древности. Число 360 было выбрано, можетъ-быть, потому, что оно очень удобно въ практическомъ отношеніи, такъ какъ имѣетъ 22 дѣлителя.

Въ концѣ XVIII столѣтія, во Франціи, при введеніи метрической системы мѣръ предложено было также и *десятичное* дѣленіе окружности, по которому окружность содержитъ четыреста градусовъ, градусъ — сто минутъ и минута — сто секундъ[1]); но это новое дѣленіе вскорѣ же было оставлено. Тѣмъ не менѣе оно нерѣдко встрѣчается теперь на *геодезическихъ*[2]) инструментахъ и принято за границей многими геодезистами, какъ болѣе удобное для вычисленій.

Къ §§ 26 и 25. Измѣненія тригонометрическихъ функцій *по отдѣльнымъ четвертямъ* можно прослѣдить еще иначе, а именно съ помощью формулъ § 32. Покажемъ этотъ способъ, а кромѣ того дадимъ и болѣе строгій выводъ тѣхъ *предѣловъ*, которые считаются значеніями функціи для концовъ четверти.

I. Измѣненія синуса и косинуса разсмотримъ такъ же, какъ и раньше, т.-е. по чертежу, — который, между прочимъ, легко удерживается и въ памяти.

Что касается въ частности, значеній 0, — 1, и 1, то для нихъ докажемъ слѣдующее: *если подвижной радіусъ неопредѣленно*

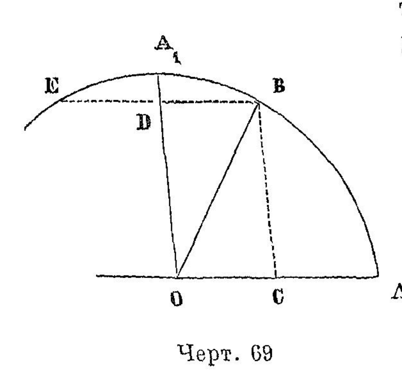
---

[1]) Въ новой системѣ для градуса принятъ знакъ g, минута и секунда обозначаются попрежнему (такъ пишутъ $13^g\,40'\,35''$).

[2]) *Геодезія* (практическая геометрія) занимается различными измѣреніями на земной поверхности.

приближается къ главному діаметру, то его проекція на этотъ діаметръ имѣетъ предѣломъ радіусъ, а проекція на другой главный діаметръ неопредѣленно уменьшается.

Дѣйствительно: 1) Такъ какъ хорда BE менѣе дуги BA_1E, то линія OC, равная BD, менѣе дуги BA_1 и потому также неопредѣленно уменьшима. 2) Изъ треугольника OBD находимъ, что $OB - OD < BD$ и слѣдовательно $OB - OD < \smile BA_1$; если же BA_1 неопредѣленно уменьшается, то длина OB есть предѣлъ длины OD.



Черт. 69

II. Освоившись съ измѣненіями синуса и косинуса, легко уже относительно остальныхъ функцій соображать по ихъ зависимости отъ первыхъ двухъ. Приведемъ примѣры.

1) Укажемъ ходъ тангенса во II четверти. — Имѣемъ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sn}\alpha}{\operatorname{cs}\alpha}$. Заключая по измѣненіямъ числителя и знаменателя объ измѣненіи самой дроби, найдемъ, во-первыхъ, что во II четверти тангенсъ отрицателенъ, потому что синусъ и косинусъ здѣсь имѣютъ *разные* знаки[1]); во-вторыхъ, по абсолютной величинѣ синусъ уменьшается, косинусъ увеличивается, слѣдовательно тангенсъ уменьшается. Для концовъ II четверти получимъ

$$\operatorname{tg}90^\circ = \frac{\operatorname{sn}90^\circ}{\operatorname{cs}90^\circ} = \frac{1}{-0} = -\infty\ ^{*}) \text{ и } \operatorname{tg}180^\circ = \frac{\operatorname{sn}180^\circ}{\operatorname{cs}180^\circ} = \frac{0}{-1} = -0.$$

2) Укажемъ еще ходъ секанса въ III четверти. — Имѣемъ $\operatorname{sc}\alpha = \frac{1}{\operatorname{cs}\alpha}$. Такъ какъ въ III четверти $\operatorname{cs}\alpha$ отрицателенъ, то и $\operatorname{sc}\alpha$ отрицателенъ; по абсолютной величинѣ $\operatorname{cs}\alpha$ уменьшается,

---

[1]) Замѣтимъ, что это разсужденіе о знакахъ имѣетъ только мнемоническое значеніе, такъ какъ мы обращались уже къ *чертежу* при самомъ выводѣ формулы $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sn}\alpha}{\operatorname{cs}\alpha}$.

*) Истинный смыслъ этой *условной* записи долженъ быть ясенъ учащемуся изъ § 26. Замѣтимъ, что здѣсь необходимо уже *различать* $+0$ и -0

слѣдов. $\sec\alpha$ увеличивается. Для концовъ III четверти получимъ $\sec 180^\circ = \frac{1}{\cos 180^\circ} = \frac{1}{-1} = -1$ и $\sec 270^\circ = \frac{1}{\cos 270^\circ} = \frac{1}{-0} = -\infty$.

3) Подобнымъ же образомъ для $\operatorname{ctg} 180^\circ$ найдемъ: *a*) если уголъ 180° относится ко II четверти, то $\operatorname{ctg} 180^\circ = \frac{-1}{0} = -\infty$; b) если же уголъ 180° относится къ *III* четверти, то $\operatorname{ctg} 180^\circ = \frac{-1}{-0} = +\infty$.

Такъ же поступаемъ и въ остальныхъ случаяхъ.

Къ § 29. ***Одинаковыя фазы въ ходѣ періодической функціи.*** Въ ходѣ періодической функціи полезно отмѣтить особымъ названіемъ тѣ значенія, которыя не только равны сами, но и сопровождаются соотвѣтственно равными предыдущими и послѣдующими. Они называются одинаковыми *фазами* [1]). Такъ, напримѣръ, въ ходѣ синуса при 30° и 750° получаются одинаковыя фазы; а 30° и 150° хотя и даютъ равныя значенія синуса, но это уже не будутъ одинаковыя фазы [2]).

Пользуясь новымъ понятіемъ, можно періоду дать такое опредѣленіе: *періодъ есть разстояніе по аргументу между ближайшими одинаковыми фазами.*

Къ §§ 33 и 34. ***Другое доказательство.*** Пользуясь чертежами § 14, будемъ разсматривать всѣ четверти вмѣстѣ.

a) Въ какой бы четверти ни была точка B, изъ треугольника OBC находимъ $BC^2 + OC^2 = OB^2$, откуда

$$\frac{BC^2}{R^2} + \frac{OC^2}{R^2} = \frac{OB^2}{R^2} \quad \text{или} \quad \left(\frac{BC}{R}\right)^2 + \left(\frac{OC}{R}\right)^2 = 1.$$

Замѣтимъ теперь, что $\frac{BC}{R}$ есть *абсолютная величина* $\sin\alpha$; но будетъ ли $\sin\alpha$ равенъ $\frac{BC}{R}$ или $-\frac{BC}{R}$, въ томъ и другомъ

---

1) Слово *фаза* означаетъ собственно *явленіе.*

2) Во II четверти синусъ принимаетъ тѣ же значенія, что и въ I четверти, но порядокъ ихъ *обратный*

случаѣ $\left(\frac{BC}{R}\right)^2 = \text{sn}^2\,\alpha$; точно такъ же всегда $\left(\frac{OC}{R}\right)^2 = \text{cs}^2\,\alpha$. Такимъ образомъ для каждой четверти имѣемъ $\text{sn}^2\,\alpha + \text{cs}^2\,\alpha = 1$.

b) Во всѣхъ четвертяхъ $\triangle OEA \infty OBC$; слѣдовательно

$$\frac{AE}{OA} = \frac{BC}{OC}, \text{ откуда } \frac{AE}{OA} = \frac{BC}{R} \Big/ \frac{OC}{R}.$$

Послѣднія три отношенія служатъ *абсолютными величинами* для $\text{tg}\,\alpha$, $\text{sn}\,\alpha$ и $\text{cs}\,\alpha$; чтобы перейти на самыя функціи, требуются еще сопровождающіе *знаки*[1]); но въ каждой четверти они таковы, что ихъ можно приписать *безъ нарушенія равенства:* это ясно изъ таблицы знаковъ въ § 27. Такимъ образомъ всегда $\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sn}\,\alpha}{\text{cs}\,\alpha}$.

c) Тѣмъ же способомъ докажемъ, что $\text{ctg}\,\alpha = \frac{\text{cs}\,\alpha}{\text{sn}\,\alpha}$.

b) Въ каждой четверти $\triangle OEA \infty OBC$ и слѣдовательно $\frac{OE}{OA} = \frac{OB}{OC}$; отсюда $\frac{OE}{OA} = \frac{OB}{R} \Big/ \frac{OC}{R}$ или $\frac{OE}{R} \cdot \frac{OC}{R} = 1$.

Отношенія $\frac{OE}{R}$ и $\frac{OC}{R}$ служатъ *абсолютными величинами* для $\text{sc}\,\alpha$ и $\text{cs}\,\alpha$; но такъ какъ $\text{sc}\,\alpha$ и $\text{cs}\,\alpha$ вездѣ имѣютъ одинаковые знаки (см. § 27), то произведеніе ихъ абсолютныхъ величинъ равно произведенію самихъ функцій. Такимъ образомъ всегда $\text{sc}\,\alpha\,.\,\text{cs}\,\alpha = 1$.

e) Тѣмъ же пріемомъ докажемъ и формулу $\text{csc}\,\alpha\,.\,\text{sn}\,\alpha = 1$.

Къ §§ 32 и 35. Изъ § 22 видно, что если извѣстна *одна* какая-либо тригонометрическая функція, то возможно *построить* подвижной радіусъ, а слѣдовательно и найти остальныя пять функцій. Но для того, чтобы изъ шести количествъ *одно* можно было назначать *произвольно*, а остальныя опредѣлялись бы по нему, эти шесть количествъ должны быть связаны между собой *пятью различными* уравненіями. Такимъ образомъ между тригонометрическими функціями одного и того же угла существуетъ взаимная зависимость, которая сводится къ пяти самостоятельнымъ уравненіямъ.

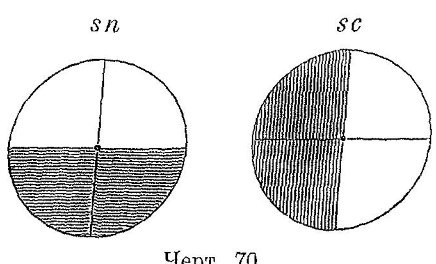
---

[1]) Такъ, для II четверти, чтобы перейти на $\text{tg}\,\alpha$, $\text{sn}\,\alpha$ и $\text{cs}\,\alpha$, надо имѣть: $-\frac{AE}{OA}$, $\frac{BC}{R}$ и $-\frac{OC}{R}$.

Уравненія § 32 соотвѣтствуютъ сказанному *выше:* дѣйствительно, мы имѣемъ пять уравненій, и они независимы между собой, потому что каждое слѣдующее содержитъ функцію, какой нѣтъ въ предыдущихъ.

Къ §§ 47 и 48. Слѣдующее соображеніе не только *даетъ* соотношеніе знаковъ, но и объясняетъ его *происхожденіе.*

Обратимъ вниманіе на то, что распредѣленіе[1]) знаковъ синуса есть повернутое на $+90°$ (влѣво на $90°$) распредѣленіе знаковъ косинуса, какъ показываетъ приложенный чертежъ (для наглядности, область отрицательныхъ значеній затушевана). Отсюда слѣдуетъ, что $sn(\alpha+90°)$ и $cs\,\alpha$ имѣютъ одинаковые знаки, а $cs(\alpha+90°)$ имѣетъ знакъ одинаковый съ $sn(\alpha+180°)$ и слѣдов. обратный съ $sn\,\alpha$.



Черт. 70.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ еще, что $sn(\alpha+270°)$ и $cs(\alpha+180°)$ имѣютъ одинаковые знаки, а потому $sn(\alpha+270°)$ и $cs\,\alpha$ имѣютъ противоположные знаки; такъ же найдемъ, что $cs(\alpha+270°)$ имѣетъ знакъ одинаковый съ $sn(\alpha+360°)$, а слѣдов. и съ $sn\,\alpha$.

Къ § 55. ***Понятіе объ обратныхъ круговыхъ функціяхъ.*** Дуга, соотвѣтствующая данному синусу, очевидно, *зависитъ* отъ того числа, которое сдѣлано значеніемъ синуса,—есть *функція* этого числа. То же самое можно сказать и въ случаѣ косинуса, тангенса и т. д. Отсюда возникаетъ понятіе объ *обратныхъ круговыхъ*[2]) функціяхъ.

---

[1]) По четвертямъ круга.

[2]) Синусъ, косинусъ и т. д. называются еще *круговыми* функціями, такъ какъ связаны со свойствами круга. Это названіе употребляется преимущественно въ *высшей* математикѣ, и тамъ аргументомъ круговой функціи служитъ не уголъ, а выраженіе дуги въ частяхъ радіуса, разсматриваемое притомъ не какъ мѣра угла, а какъ отвлеченное алгебраическое количество.

Съ этой новой точки зрѣнія мы и будемъ говорить далѣе объ обратныхъ круговыхъ функціяхъ

Соотвѣтственно прямымъ круговымъ функціямъ, онѣ имѣютъ слѣдующія названія и обозначенія:

арксинусъ	арккосинусъ	арктангенсъ	арккотангенсъ	арксекансъ	арккосекансъ
arcsn	arccs	arctg	arcctg	arcsc	arccsc

Такъ, можно написать $y = \mathrm{arctg}\, x$; здѣсь y есть функція, x аргументъ, arctg знакъ зависимости y отъ x (которая состоитъ въ томъ, что для полученія y надо x принять за тангенсъ и найти соотвѣтствующую дугу). Подобный же смыслъ имѣетъ равенство

$$\mathrm{arcsn}\,\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} = 0{,}52360; \quad \text{и т. д.}$$

Изъ § 53 слѣдуетъ, что обратныя круговыя функціи суть *многозначныя* [1]). Во избѣжаніе сбивчивости, обозначеніями arcsn, arccs и т. д. пользуются обыкновенно только тогда, когда имѣютъ въ виду одно *простѣйшее* значеніе обратной функціи, т.-е. наименьшее по абсолютной величинѣ, а если такихъ значеній два [2]), то положительное изъ нихъ (при этомъ условіи $\mathrm{arcsn}\, x$, $\mathrm{arctg}\, x$, $\mathrm{arcctg}\, x$ и $\mathrm{arccsc}\, x$ содержатся между $+\frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2}$, а $\mathrm{arccs}\, x$ и $\mathrm{arcsc}\, x$ между 0 и π); такъ будемъ имѣть:

$$\mathrm{arcsn}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}, \quad \mathrm{arccs}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}\pi, \quad \mathrm{arctg}\, 1 = \frac{\pi}{4}; \quad \text{и т. д.}$$

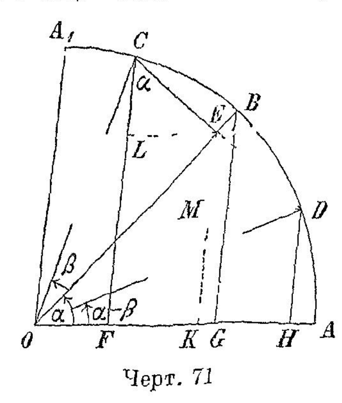
Къ §§ 64, 65 и 66. Въ *частныхъ* случаяхъ выводъ формулъ для $\mathrm{sn}\,(\alpha \pm \beta)$ и $\mathrm{cs}\,(\alpha \pm \beta)$ можно сдѣлать нагляднѣе и, кромѣ того, безъ теоремъ о рѣшеніи треугольника, а исходя лишь изъ основныхъ понятій тригонометріи. Помѣщаемъ здѣсь примѣръ такого вывода.

---

[1]) Функція называется *многозначной*, если одному и тому же значенію аргумента соотвѣтствуетъ *нѣсколько* значеній функціи. Примѣромъ такой функціи въ алгебрѣ можетъ служить корень.

[2]) Какъ въ случаѣ $\mathrm{arccs}\, x$ и $\mathrm{arcsc}\, x$.

Пусть будутъ α и β положительные углы, въ суммѣ составляющіе менѣе 90°, и пусть α болѣе, чѣмъ β. Въ тригонометрическомъ кругѣ отложимъ уголъ α и отъ его конца въ обѣ стороны уголъ равный β (черт. 71). Затѣмъ построимъ тригонометрическія линіи, соотвѣтствующія синусу и косинусу угловъ α, β*), $\alpha+\beta$ и $\alpha-\beta$: для этого проведемъ хорду CD**) и опустимъ перпендикуляры на линію OA изъ точекъ C, B и D. Проведемъ еще три *вспомогательныя* линіи: $EK \perp OA$, $EL \parallel OA$ и $DM \parallel OA$.



Черт. 71

Теперь будемъ имѣть:

$$\operatorname{sn}(\alpha+\beta)=\frac{CF}{R}, \qquad \operatorname{cs}(\alpha+\beta)=\frac{OF}{R},$$

$$\operatorname{sn}(\alpha-\beta)=\frac{DH}{R}, \qquad \operatorname{cs}(\alpha-\beta)=\frac{OH}{R}.$$

Но $CF=LF+CL=EK+CL$, $\quad OF=OK-FK=OK-EL$,
$DH=MK=EK-EM=EK-CL$, $\quad OH=OK+KH=OK+DM$
$=OK+EL$.

Такимъ образомъ

$$\operatorname{sn}(\alpha\pm\beta)=\frac{EK}{R}\pm\frac{CL}{R} \quad (1) \quad \text{и} \quad \operatorname{cs}(\alpha\pm\beta)=\frac{OK}{R}\mp\frac{EL}{R} \quad (2).$$

Линіи EK, CL, OK и EL суть катеты тр-ковъ OEK и CEL, которые *подобны* треугольнику OBG***). Изъ этого подобія слѣдуетъ

$$\frac{EK}{BG}=\frac{OK}{OG}=\frac{OE}{OB} \quad \text{и} \quad \frac{CL}{OG}=\frac{EL}{BG}=\frac{CE}{OB}.$$

---

*) *Начальнымъ* радіусомъ угла β служитъ OB.

**) Тогда получимъ $CE \perp OB$.

***) Тр-ки OEK и OBG имѣютъ общій уголъ α; въ тр-кѣ CEL уголъ $LCE=AOB=\alpha$ по соотвѣтственной перпендикулярности сторонъ.

Раздѣливъ здѣсь каждую линію на R, получимъ

$$\frac{EK}{R} : \operatorname{sn}\alpha = \frac{OK}{R} : \operatorname{cs}\alpha = \operatorname{cs}\beta : 1 \qquad (3)$$

$$\frac{CL}{R} : \operatorname{cs}\alpha = \frac{EL}{R} : \operatorname{sn}\alpha = \operatorname{sn}\beta : 1 \qquad (4)$$

Отсюда найдемъ

изъ (3) $\frac{EK}{R} = \operatorname{sn}\alpha \,.\, \operatorname{cs}\beta$, $\frac{OK}{R} = \operatorname{cs}\alpha \,.\, \operatorname{cs}\beta$

изъ (4) $\frac{CL}{R} = \operatorname{cs}\alpha \,.\, \operatorname{sn}\beta$, $\frac{EL}{R} = \operatorname{sn}\alpha \,.\, \operatorname{sn}\beta$.

Подставляя эти выраженія въ равенства (1) и (2), будемъ имѣть

$$\operatorname{sn}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sn}\alpha \,.\, \operatorname{cs}\beta \pm \operatorname{cs}\alpha \,.\, \operatorname{sn}\beta$$

$$\operatorname{cs}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{cs}\alpha \,.\, \operatorname{cs}\beta \mp \operatorname{sn}\alpha \,.\, \operatorname{sn}\beta.$$

Замѣчаніе. Сдѣланный нами выводъ былъ *совмѣстный* для $\alpha + \beta$ и $\alpha - \beta$. При *отдѣльномъ* разборѣ, для случая суммы въ чертежѣ 71 будутъ *лишними линіи* OD, DE, DH и DM; но для случая разности слѣдуетъ сохранить тотъ же чертежъ и тѣ же переходы въ линіяхъ, такъ какъ для составленія функцій угла β его надо будетъ построить, какъ *положительный*, влѣво отъ его начальнаго радіуса OB*).

Къ § 71. Полезно еще замѣтить, что *всѣ* тригонометрическія функціи какого угодно угла выражаются *раціонально*[1]) черезъ *тангесъ половины* этого угла. Для *доказательства* достаточно разсмотрѣть $\operatorname{sn}\alpha$ и $\operatorname{cs}\alpha$, потому что остальныя функціи выражаются черезъ эти двѣ раціонально.

1) Въ равенствѣ $\operatorname{sn}\alpha = 2\operatorname{sn}\frac{\alpha}{2}\operatorname{cs}\frac{\alpha}{2}$ раздѣлимъ и умножимъ вторую часть на $\operatorname{cs}\frac{\alpha}{2}$ и примѣнимъ формулы II, IV и VII; получимъ

*) Уголъ BOD съ тригонометрической точки зрѣнія есть $-\beta$.

[1]) Т.-е. безъ помощи извлеченія корня.

$$\operatorname{sn}\alpha = 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot \operatorname{cs}^2\frac{\alpha}{2} = 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} : \operatorname{sc}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

2) Въ равенствѣ $\operatorname{cs}\alpha = \operatorname{cs}^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sn}^2\frac{\alpha}{2}$ раздѣлимъ и умножимъ вторую часть на $\operatorname{cs}^2\frac{\alpha}{2}$ и примѣнимъ тѣ же формулы; получимъ

$$\operatorname{cs}\alpha = \left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)\cdot \operatorname{cs}^2\frac{\alpha}{2} = \left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right) : \operatorname{sc}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Къ § 72. ***Доказательство двойныхъ знаковъ въ формулахъ XVIII, XIX, XX.*** Прежде всего пояснимъ, почему доказательство дѣйствительно требуется. Возьмемъ для примѣра $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. На первый взглядъ двойственность знака можетъ казаться очевидной, потому что тангенсомъ способно быть и положительное и отрицательное число, и ни съ какимъ опредѣленнымъ угломъ онъ здѣсь не связанъ. Но не надо забывать, что хотя уголъ α и неизвѣстенъ, но предполагается извѣстнымъ $\operatorname{cs}\alpha$, а мы не вправѣ рѣшать *заранѣе*, что со всякимъ значеніемъ $\operatorname{cs}\alpha$ *совмѣстны* оба знака для $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ *).

---

*) Для наглядности замѣтимъ, что съ такимъ же правомъ можно бы предположить, что оба знака для $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ совмѣстны и со всякимъ значеніемъ $\operatorname{sn}\alpha$; а между тѣмъ этого нѣтъ: при данномъ $\operatorname{sn}\alpha$ возможенъ только *одинъ* знакъ для $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, а именно *одинаковый* съ $\operatorname{sn}\alpha$ (какъ видно изъ сравненія формулъ $\operatorname{sn}\alpha = 2\operatorname{sn}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{cs}\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{sn}\frac{\alpha}{2} : \operatorname{cs}\frac{\alpha}{2}$).

Если, напримѣръ, $\operatorname{sn}\alpha = -\frac{3}{5}$, то, опредѣляя $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ по формулѣ XX, будемъ имѣть: 1) $\operatorname{cs}\alpha = \pm\frac{4}{5}$ [см. § 36, примѣръ 1 b] и затѣмъ

2) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\left(1\mp\frac{4}{5}\right) : \left(1\pm\frac{4}{5}\right)} = -\frac{1}{3}; -3.$

[тотъ же результатъ можно получить изъ уравненія $\operatorname{sn}\alpha = 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} : \left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)$, выведеннаго въ прибавленіи къ § 71]

Переходимъ къ самому доказательству.

Если данъ $\operatorname{cs}\alpha$, а значенія α ничѣмъ не ограничены, то опредѣленіе функцій $\frac{\alpha}{2}$ равносильно ихъ опредѣленію для *всѣхъ* значеній α, допускаемыхъ даннымъ значеніемъ косинуса. Пусть будетъ изъ нихъ x наименьшее положительное; тогда на основаніи § 56 п. 2 будемъ имѣть $\alpha = \pm x + 360^\circ . n$, и слѣдовательно

$$\frac{\alpha}{2} = \pm\frac{x}{2} + 180^\circ . n.$$

Посмотримъ, въ какихъ точкахъ оканчиваются дуги этого ряда. Для $\pm\frac{x}{2}$ получаются двѣ точки на концахъ хорды параллельной вертикальному діаметру, слѣдов. въ двухъ смежныхъ четвертяхъ; для $\frac{\alpha}{2}$ получимъ: при n четномъ тѣ же точки, что и раньше, а при n нечетномъ діаметрально противоположныя имъ. Такимъ образомъ концы дугъ $\frac{\alpha}{2}$ суть четыре точки, распредѣленныя по *всѣмъ* четвертямъ; слѣдовательно, находя функціи этихъ дугъ, мы встрѣтимъ каждую функцію какъ съ положительнымъ значеніемъ, такъ и съ отрицательнымъ.

Итакъ, если дано значеніе косинуса и требуется опредѣлить значеніе одной изъ функцій подъ единственнымъ условіемъ, что вторая дуга составляетъ половину первой дуги, то задача допускаетъ *два* рѣшенія[1]).

Къ § 73. Формулы (a) и (b) § 73 можно получить также изъ формулы XX. Покажемъ, почему при этомъ пропадаютъ $\pm$, стоящіе передъ $\sqrt{\ldots}$.

1) Умножимъ въ формулѣ XX числителя и знаменателя подкоренной дроби на $1 + \operatorname{cs}\alpha$; получимъ

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\operatorname{cs}^2\alpha}{(1+\operatorname{cs}\alpha)^2}} = \pm\sqrt{\frac{\operatorname{sn}^2\alpha}{(1+\operatorname{cs}\alpha)^2}}.$$

---

[1]) Если опредѣлять *отдѣльно* $\operatorname{sn}\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{cs}\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, то получаются *два* рѣшенія; если же опредѣлять *подборъ* двухъ изъ этихъ функцій или всѣхъ трехъ, то получаются *четыре* рѣшенія.

Но было бы ошибочно всегда замѣнять $\sqrt{\frac{\text{sn}^2\,\alpha}{(1+\text{cs}\,\alpha)^2}}$ через $\frac{\text{sn}\,\alpha}{1+\text{cs}\,\alpha}$, чтó видно изъ слѣдующаго: через $\sqrt{\ldots}$ обозначенъ *положительный* корень (см. примѣч. къ форм. XX), между тѣмъ какъ $\frac{\text{sn}\,\alpha}{1+\text{cs}\,\alpha}$ можетъ имѣть не только положительное, но и отрицательное значеніе[2]); въ послѣднемъ случаѣ положительнымъ значеніемъ будетъ $-\frac{\text{sn}\,\alpha}{1+\text{cs}\,\alpha}$.

Согласовать знаки можно при помощи слѣдующаго соображенія: значеніе дроби $\frac{\text{sn}\,\alpha}{1+\text{cs}\,\alpha}$ положительно или отрицательно въ зависимости отъ $\text{sn}\,\alpha$, такъ какъ $1+\text{cs}\,\alpha$ *всегда* положительно[3]); но $\text{sn}\,\alpha$ имѣетъ тотъ же знакъ, какъ и $\text{tg}\,\frac{\alpha}{2}$, что видно изъ разложеній $\text{sn}\,\alpha = 2\,\text{sn}\,\frac{\alpha}{2}\cdot\text{cs}\,\frac{\alpha}{2}$ и $\text{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \text{sn}\,\frac{\alpha}{2} : \text{cs}\,\frac{\alpha}{2}$; такимъ образомъ значенія $\frac{\text{sn}\,\alpha}{1+\text{cs}\,\alpha}$ и $\text{tg}\,\frac{\alpha}{2}$ *по знаку одинаковы.*

Поэтому, когда мы беремъ $\text{tg}\,\frac{\alpha}{2} = +\sqrt{\ldots}$, то должны при этомъ взять $\sqrt{\ldots} = \frac{\text{sn}\,\alpha}{1+\text{cs}\,\alpha}$; а когда беремъ $\text{tg}\,\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\ldots}$, то при этомъ полагаемъ $\sqrt{\ldots} = -\frac{\text{sn}\,\alpha}{1+\text{cs}\,\alpha}$.

Въ обоихъ случаяхъ окончательно будемъ имѣть

$$\text{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{\text{sn}\,\alpha}{1+\text{cs}\,\alpha}.$$

2) Для полученія формулы (b) умножимъ подъ корнемъ числителя и знаменателя на $1-\text{cs}\,\alpha$; а вопросъ о знакахъ рѣшается такъ же, какъ и въ первомъ случаѣ.

---

[1]) Въ зависимости отъ α

[2]) Т.-е. хотя бы $\text{cs}\,\alpha$ былъ и отрицателенъ

Къ §§ 91 и 92. Въ составъ треугольника входятъ три стороны и три угла; но изъ этихъ шести элементовъ достаточно имѣть три (исключая случай трехъ угловъ), чтобы можно было построить треугольникъ и слѣдов. получить остальные три элемента. Если же ихъ можно получить построеніемъ, то возможно и вычислить; а для этого должно существовать столько различныхъ уравненій, сколько элементовъ остаются неизвѣстными, т.-е. три уравненія. Итакъ, зависимость между сторонами и углами треугольника сводится къ *тремъ различнымъ* соотношеніямъ. Если соотношеній получено болѣе трехъ, то нѣкоторыя изъ нихъ будутъ уже *слѣдствіями* другихъ.

Въ прямоугольномъ треугольникѣ основными соотношеніями можно считать, напримѣръ, слѣдующія:

$$A+B=90^\circ, \quad a^2+b^2=c^2 \quad \text{и} \quad a=c\,.\,\mathrm{sn}\,A.$$

Остальныя легко получить какъ ихъ слѣдствіе.

Къ §§ 115 и 117—120. Въ предыдущемъ[1]) было уже объяснено, что между углами и сторонами треугольника возможны только три независимыхъ соотношенія.

Въ косоугольномъ треугольникѣ такими соотношеніями можно считать, напримѣръ, слѣдующія:

$$A+B+C=180^\circ \quad (1), \qquad \frac{a}{b}=\frac{\mathrm{sn}\,A}{\mathrm{sn}\,B} \quad (2) \quad \text{и} \quad \frac{a}{c}=\frac{\mathrm{sn}\,A}{\mathrm{sn}\,C} \quad (3).$$

Остальныя формулы можно вывести изъ этихъ трехъ.

Для примѣра выведемъ равенство $a^2=b^2+c^2-2\,bc\,.\,\mathrm{cs}\,A$.

Прежде всего, на основаніи пропорціи (2) и (3), выразимъ a, b и c съ помощью общаго множителя, полагая

$$a=k\,.\,\mathrm{sn}\,A, \qquad b=k\,.\,\mathrm{sn}\,B \qquad \text{и} \qquad c=k\,.\,\mathrm{sn}\,C.$$

Теперь получимъ $a^2=k^2\,\mathrm{sn}^2\,A$; но изъ рав. (1) слѣдуетъ, что $\mathrm{sn}\,A=\mathrm{sn}\,(B+C)$; послѣ этого будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} a^2 &= k^2\mathrm{sn}^2\,(B+C)=k^2\,(\mathrm{sn}\,B\,\mathrm{cs}\,C+\mathrm{cs}\,B\,\mathrm{sn}\,C)^2 \\ &= k^2\,\mathrm{sn}^2 B\,\mathrm{cs}^2\,C+k^2\,\mathrm{cs}^2 B\,\mathrm{sn}^2 C+2\,k^2\,\mathrm{sn}\,B\,\mathrm{sn}\,C\,\mathrm{cs}\,B\,\mathrm{cs}\,C \\ &= k^2\,\mathrm{sn}^2 B\,(1-\mathrm{sn}^2\,C)+k^2\,\mathrm{sn}^2\,C\,(1-\mathrm{sn}^2 B)+2\,k^2\,\mathrm{sn}\,B\,\mathrm{sn}\,C\,\mathrm{cs}\,B\,\mathrm{cs}\,C \\ &= k^2\,\mathrm{sn}^2 B+k^2\,\mathrm{sn}^2\,C-2\,k^2\,\mathrm{sn}^2\,B\,\mathrm{sn}^2\,C+2\,k^2\,\mathrm{sn}\,B\,\mathrm{sn}\,C\,\mathrm{cs}\,B\,\mathrm{cs}\,C \\ &= k^2\,\mathrm{sn}^2 B+k^2\,\mathrm{sn}^2 C+2\,k^2\,\mathrm{sn}\,B\,\mathrm{sn}\,C\,(\mathrm{cs}\,B\,\mathrm{cs}\,C-\mathrm{sn}\,B\,\mathrm{sn}\,C) \\ &= k^2\,\mathrm{sn}^2\,B+k^2\,\mathrm{sn}^2 C+2\,k^2\,\mathrm{sn}\,B\,\mathrm{sn}\,C\,\mathrm{cs}\,(B+C). \end{aligned}$$

---

[1]) См. прибавл. къ §§ 91 и 92.

Но по условію $k \,.\, \mathrm{sn}\, B = b$ и $k \,.\, \mathrm{sn}\, C = c$, а по рав. (1) $\mathrm{cs}(B + C) = -\mathrm{cs}\, A$. Такимъ образомъ, послѣ замѣны, получимъ

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\, bc \,.\, \mathrm{cs}\, A.$$

Къ § 126. Для *повѣрки* вычисленія, предложеннаго въ § 126, можно воспользоваться отношеніемъ суммы или разности данныхъ сторонъ къ третьей сторонѣ; а именно съ помощью § 116 нетрудно получить слѣдующія двѣ формулы:

$$(c + b) : a = \mathrm{cs}\frac{C - B}{2} : \mathrm{sn}\frac{A}{2} \quad \text{и} \quad (c - b) : a = \mathrm{sn}\frac{C - B}{2} : \mathrm{cs}\frac{A}{2}\ ^{*)}.$$

Примѣнимъ, напримѣръ, первую изъ нихъ; $\lg(c + b)$ и $\lg a$ возьмемъ готовыми изъ имѣющагося рѣшенія, а $\lg \mathrm{cs}\frac{1}{2}(C - B)$ и $\lg \mathrm{sn}\frac{1}{2}A$, или $\lg \mathrm{cs}\frac{1}{2}(C + B)$, найдемъ вновь; повѣрочное вычисленіе будетъ таково:

$-\ \lg(c + b) = 3{,}49927$	$-\ \lg \mathrm{cs}\frac{1}{2}(C - B) = 9{,}96847 - 10$
$\lg a = 3{,}30135$	$\lg \mathrm{cs}\frac{1}{2}(C + B) = 9{,}77055 - 10$
$0{,}19792$	$0{,}19792$

Замѣчаніе. Мы получили *полное совпаденіе* результатовъ, но на это не всегда можно разсчитывать, вслѣдствіе того, что логариѳмическое вычисленіе не есть точное; можно во всякомъ случаѣ требовать, чтобы результаты были *достаточно близки* между собою (см. также прибавл. къ § 129).

Къ § 127. ***Изслѣдованіе задачи по сторонѣ с.*** Опредѣлимъ сторону c съ помощью *данныхъ* — изъ уравненія

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\, bc \,.\, \mathrm{cs}\, A.$$

Представивъ это уравненіе въ видѣ

$$c^2 - 2b\, \mathrm{cs} A \,.\, c - (a^2 - b^2) = 0,$$

найдемъ $$c = b \,.\, \mathrm{cs}\, A \pm \sqrt{b^2 \,.\, \mathrm{cs}^2 A + (a^2 - b^2)}$$

или $$c = b \,.\, \mathrm{cs}\, A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \,.\, \mathrm{sn}^2 A}.$$

Изслѣдуемъ первое выраженіе c при $a > b$ и при $a < b$.

---

*) Онѣ извѣстны подъ именемъ *формулъ Мольвейде* (см. также §§ 134 и 135).

I. Пусть $a > b$. Если $a > b$, то $a^2 - b^2 > 0$; слѣдов. подъ корнемъ сумма положительныхъ чиселъ, и потому значенія c дѣйствительны. Изъ положительности $a^2 - b^2$ слѣдуетъ также, что абсолютная величина корня болѣе абсолютной величины $b \,.\, \mathrm{cs}\, A$; поэтому, взявъ $+\sqrt{\ldots}$, мы получимъ положительное c, хотя бы $b \,.\, \mathrm{cs}\, A$ было и отрицательно [1]); наоборотъ, взявъ $-\sqrt{\ldots}$, получимъ отрицательное c, хотя бы $b \,.\, \mathrm{cs}\, A$ было положительно.

Итакъ, при $a > b$ задача *всегда* возможна и допускаетъ *одно* рѣшеніе.

II. Пусть $a < b$. Въ этомъ случаѣ $a^2 - b^2 < 0$; для дѣйствительности c требуется, чтобы $b^2 \mathrm{cs}^2 A + (a^2 - b^2) \geqslant 0$ или, иначе, $a^2 - b^2 \mathrm{sn}^2 A \geqslant 0$, откуда $a \geqslant b \,.\, \mathrm{sn}\, A$ *). Положимъ, что это условіе выполнено, и сравнимъ по абсолютной величинѣ $b \,.\, \mathrm{cs} A$ и $\sqrt{\ldots\ldots}$. Если $a^2 - b^2 < 0$, то $b^2 \mathrm{cs}^2 A + (a^2 - b^2) < b^2 \mathrm{cs}^2 A$; слѣдовательно абсолютная величина корня менѣе абсолютной величины $b \,.\, \mathrm{cs}\, A$.

Поэтому, если $b \,.\, \mathrm{cs}\, A$ отрицательно, т.-е. если уголъ A тупой, то оба значенія c будутъ отрицательны; такимъ образомъ при $A > 90^\circ$ задача невозможна.

Предположимъ теперь, что $A < 90^\circ$ и слѣдовательно $b \,.\, \mathrm{cs}\, A$ положительно; тогда, если $a > b \,.\, \mathrm{sn}\, A$, то c имѣетъ два значенія, и они оба положительны; если же $a = b \,.\, \mathrm{sn}\, A$, то получается одно рѣшеніе, также положительное.

Итакъ, въ случаѣ $a < b$ имѣемъ:

1) задача невозможна при $a < b \,.\, \mathrm{sn}\, A$ и при $A > 90^\circ$;

2) если $A < 90^\circ$ и кромѣ того $a \geqslant b \,.\, \mathrm{sn}\, A$, то задача допускаетъ два рѣшенія при $a > b \,.\, \mathrm{sn}\, A$ и одно рѣшеніе при $a = b \,.\, \mathrm{sn}\, A$.

Къ § 129. Выполнимъ ту *повѣрку*, которая указана въ примѣчаніи къ примѣру II, 3.

Имѣемъ $c_1 = 7{,}99867$ и $c_2 = 4{,}12573$; слѣдовательно $\frac{1}{2}(c_1 + c_2) = 6{,}06220$; а вычисляя $b \,.\, \mathrm{cs}\, A$, получимъ $b \,.\, \mathrm{cs}\, A = 6{,}06214$. Такимъ образомъ оказалось несовпаденіе на $0{,}00006$, которое объясняется неточностью логариѳмическаго вычисленія.

---

[1]) При A тупомъ.

*) Такъ какъ a и $b\, \mathrm{sn}\, A$ положительны, то можно по неравенству ихъ квадратовъ заключить о такомъ же неравенствѣ первыхъ степеней.

Изъ чертежа 54 видно также, что c_1 и c_2 можно вычислить еще по слѣдующимъ формуламъ:

$$c_1 = b \,.\, \mathrm{cs}\, A + a \,.\, \mathrm{cs}\, B_1 \quad \text{и} \quad c_2 = b \,.\, \mathrm{cs}\, A - a \,.\, \mathrm{cs}\, B_1.$$

Вычисливъ для этого отдѣльно $b \,.\, \mathrm{cs}\, A$ и $a \,.\, \mathrm{cs}\, B_1$, получимъ затѣмъ

$$c_1 = 7{,}99864 \quad \text{и} \quad c_2 = 4{,}12564,$$

значенія, которыя немного отличаются отъ найденныхъ ранѣе.

Эти примѣры, между прочимъ, показываютъ, что въ *приближенномъ* вычисленіи результатъ зависитъ и отъ *способа*, какимъ онъ полученъ.

